**ELTE IK - Programtervező Informatikus BSc**

# Záróvizsga tételek

2. Differenciál- és integrálszámítás

**Differenciál- és integrálszámítás**

Függvények deriválhatósága. Parciális derivált, totális derivált. Gradiens, Jacobi-mátrix. Függvényvizsgálat, szélsőérték. Riemann-integrál, parciális integrálás, integrálás helyettesítéssel. Newton-Leibniz-formula.

## 1 Függvények deriválhatósága

**Differenciálhatóság**

$1 \leq n, m \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq p, q \leq +\infty,$

$(\mathbb{R}^n, \|.\|_p)$ és $(\mathbb{R}^m, \|.\|_q)$ normált terek

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ a \in intD_f$

Az $f$ függvény differenciálható az $a$ pontban ($f \in D\{a\}$) , ha
létezik olyan $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ korlátos lineáris leképezés és olyan $\eta \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, hogy :

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + \eta(h) \cdot \|h\|_p \quad (h \in \mathbb{R}^n, a+h \in D_f)$$

ahol

$$\eta(h) \longrightarrow 0 \quad (\|h\|_p \to 0)$$

Más szóval:

$$\frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|_p} \longrightarrow 0 \quad (\|h\|_p \to 0)$$

Amennyiben $\forall a \in intD_f : f \in D\{a\}$, akkor az $f$ differenciálható ($f \in D$)

*Megjegyzés:*
*A $\mathbb{K}$ test feletti $(X, \|.\|_\bigstar)$, $(X, \|.\|_\heartsuit)$ normált terek közötti folytonos leképezés, korlátos lineáris leképezés, ha*

- *lineáris, azaz*

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) \quad (x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K})$$

- *korlátos, azaz*

$$\exists M \geq 0 : \|f(x)\|_\heartsuit \leq M\|x\|_\bigstar \quad (x \in X)$$

**Derivált**

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható egy $a \in intD_f$ pontban
$\Rightarrow \exists! L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ korlátos lineáris leképezés

Ezt az egyértelműen létező $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ korlátos lineáris leképezést az $f$ függvény $a$ pontbeli deriváltjának nevezzük, és $f'(a)$ szimbólummal jelöljük.

# 2 Parciális derivált, Totális derivált

## 2.1 Parciális derivált

**Definíció**

Tekintsük a $h \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt és az $a = (a_1, ..., a_n) \in D_h$ vektort. Legyen

$$D_{h,i}^{(a)} := \{t \in \mathbb{R} : (a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_n) \in D_h\} \quad (i = 1, ..., n)$$

És legyen:

$$h_{a,i} : D_{h,i}^{(a)} \to \mathbb{R}, \qquad \text{melyre:} \qquad h_{a,i}(t) := h(a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_n) \quad (t \in D_{h,i}^{(a)})$$

A $h_{a,i}$ parciális függvények mind egyváltozós valós függvények ($h_{a,i} \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

A $h$ függvény az $a$-ban $i$-edig változó szerint parciálisan deriválható, ha $h_{a,i} \in D\{a_i\}$. Ekkor:

$$\partial_i h(a) := h'_{a,i}(a_i)$$

valós számot a $h$ függvény $a$-beli, $i$-edik változó szerinti parcális deriváltjának nevezzük.

**Parciális derivált függvény**

Tegyük fel, hogy az előző $h$ függvényre:

$$D_{h,i} := \{a \in D_h : \text{létezik a } \partial_i h(a) \text{parciáis derivált}\} \neq \emptyset \qquad (i = 1, ..., n)$$

Ekkor a

$$x \mapsto \partial_i h(x) \quad (x \in D_{h,i})$$

függvényt a $h$ függvény $i$-edik változó szerinti parciális deriváltfüggvényének nevezzük, és a $\partial_i h$ szimbólummal jelöljük.

**Differenciálhatóság és parciális differenciálhatóság**

- Differenciálhatóság $\Rightarrow$ parciális differenciálhatóság
  $1 \leq n \in \mathbb{N},\ h \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, és $h \in D\{a\}$ $(a \in D_h)$
  $\Rightarrow \forall i = 1, ..., n :$ a $h$ függvény $i$-edik változó szerint parciálisan differenciálható az $a$ pontban, és

$$\text{grad}h(a) = (\partial_1 h(a), ..., \partial_n h(a))$$

- Differenciálhatóság $\Leftarrow$ parciális differenciálhatóság
  $1 \leq n \in \mathbb{N},\ h \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, és $a \in intD_h$
  Valamilyen $i = 1, ..., n$ esetén:
  - Tetszőleges $x \in K_r(a)$ ($r > 0$ alkalmas) helyen léteznek a $\partial_j h(x)$ parciális deriváltak ($i \neq j = 1, ..., n$) és ezek folytonosak
  - $\exists\ \partial_i h(a)$ parciális derivált

  $\Rightarrow h \in D(a)$

### 2.2 Totális derivált

Az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvényt *(totálisan) differenciálhatónak* mondjuk az $a \in D(f)$ pontban, ha létezik egy $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés úgy, hogy

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x - a\|} = 0.$$

Az $L$ lineáris leképezést az $f$ függvény $a$ pontbeli *differenciáljának,* az $L$ leképezés $M_L$ mátrixát pedig $f$ $a$-beli *differenciálhányadosának vagy Jacobi-mátrixának* nevezzük. Jelölés: $L = Df(a)$, illetve $M_L = f'(a)$.

Valós $f$ esetén ($q = 1$) az $f'(a)$ Jacobi-mátrix $1 \times p$ típusú, azaz $p$ dimenziós sorvektor. Ebben az esetben az $a$ pontbeli Jacobi-mátrix helyett az $a$ pontbeli *gradiens* vagy *gradiensvektor* elnevezés és az $f'(a) = \operatorname{grad} f(a)$ jelölés is használatos.

# 3 Jacobi-mátrix, gradiens

**Jacobi-mátrix**

Az előzőekben szereplő $L := f'(a)$ korlátos lineáris leképezéshez $\exists! A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix, melyre:

$$L(x) = Ax \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Ezért: $f'(a) := A$
az $f$ függvény $a$-beli deriváltja vagy derivált mátrixa, más néven Jacobi-mátrixa.

**Gradiens**

$m = 1$ esetén : $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{grad} f(a) := f'(a) \in \mathbb{R}^{1 \times n} \approx \mathbb{R}^n$$

Tehát ebben az esetben az $f'(a)$ Jacobi-mátrix tekinthető egy $\mathbb{R}^n$-beli vektornak, amit az $f$ függvény $a$-beli gradiensének nevezünk.

Ha $D := \{a \in D_f : f \in D\{a\}\}$, akkor az

$$x \mapsto \operatorname{grad} f(x) \in \mathbb{R}^n \quad (x \in D)$$

függvényt az $f$ függvény gradiensének nevezzük, és $\operatorname{grad} f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jelöljük.

**Gradiens mint Jacobi-mátrix sora**

Legyen $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$. Az $f = (f_1, ..., f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény akkor és csak akkor differenciálható az $a \in intD_f$ helyen, ha minden $i = 1, ..., m$ esetén az $f_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ koordináta-függvény differenciálható az $a$-ban.

Ha $f \in D\{a\}$, akkor az $f'(a)$ Jacobi-mátrix a következő alakú:

$$f'(a) = \begin{bmatrix} \operatorname{grad} f_1(a) \\ \operatorname{grad} f_2(a) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(a) \end{bmatrix}$$

# 4 Szélsőérték, függvényvizsgálat

### 4.1 Szélsőérték

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in D_f$

**Lokális maximum**

$f$-nek $a$-ban lokális maximuma van, ha alkalmas $r > 0$ mellett:

$f(x) \leq f(a) \qquad (x \in D_f, |x - a| < r)$

**Lokális minimum**

$f$-nek $a$-ban lokális minimuma van, ha alkalmas $r > 0$ mellett:

$f(x) \geq f(a) \qquad (x \in D_f, |x - a| < r)$

**Abszolút maximum**

$f$-nek $a$-ban abszolút maximuma van, ha:

$f(x) \leq f(a) \qquad (x \in D_f)$

**Abszolút mimimum**

$f$-nek $a$-ban abszolút minumuma van, ha:

$f(x) \geq f(a) \qquad (x \in D_f)$

**Lokális szélsőérték**

$f$-nek $a$-ban lokális szélsőértéke van, ha $a$-ban lokális minimuma vagy maximuma van.

**Abszolút szélsőérték**

$f$-nek $a$-ban abszolút szélsőértéke van, ha $a$-ban abszolút minimuma vagy maximuma van.

**Elsőrendű szükséges feltétel (lokális szélsőértékre)**

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek $a \in intD_f$ helyen lokális szélsőértéke van, és $f \in D\{a\}$

$\Rightarrow f'\{a\} = 0$

Az előbbi tétel segítségével már nem nehéz belátni a differenciálható függvények vizsgálata szempontjából alapvető fontosságú ún. középérték-tételeket

**Rolle-tétel**

$a, b \in \mathbb{R}\ (a < b),\ f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f \in C$, és

$\forall x \in (a, b) : f \in D\{x\}$ és $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \exists\ \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

**Lagrange-féle középértéktétel**

$a, b \in \mathbb{R}\ (a < b),\ f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f \in C$, és

$\forall x \in (a, b) : f \in D\{x\}$

$\Rightarrow \exists\ \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

**Cauchy-féle középértéktétel**

$a, b \in \mathbb{R}\ (a < b),\ f, g : [a, b] \to \mathbb{R},\ f, g \in C$, és

$\forall x \in (a, b) : f, g \in D\{x\}$

$\Rightarrow \exists\ \xi \in (a, b) :$

$(f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi) = (g(b) - g(a) \cdot f'(\xi)$

**Jelváltás**

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in intD_f$ és $f(a) = 0,\ (K_r(a) \subset D_f, r > 0)$

1. $f$ függvénynek $(-, +)$ jelváltása van, ha
   $f(x) \leq 0 \leq f(t), \quad (x, t \in K_r(a),\ x < a < t)$
2. $f$ függvénynek $(+, -)$ jelváltása van, ha
   $f(x) \geq 0 \geq f(t), \quad (x, t \in K_r(a),\ x < a < t)$

**Elsőrendű elégséges feltétel**

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in intD_f$ és $f \in D\{x\},\ (x \in K_r(a) \subset D_f, r > 0)$

1. $f'$-nak az $a$-ban $(+, -)$ jelváltása van $\Rightarrow$ $f$-nek $a$-ban lokális maximuma van.
2. $f'$-nak az $a$-ban $(-, +)$ jelváltása van $\Rightarrow$ $f$-nek $a$-ban lokális minimuma van.

## 4.2 Monotonitás

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

**Monoton növekedés**

$f$ monoton növő ($\nearrow$), ha $\forall x, t \in D_f,\ x < t : f(x) \leq f(t)$.
Amennyiben $f(x) < f(t)$, akkor $f$ szigorúan monoton növő ($\uparrow$).

**Monoton fogyás (csökkenés)**

$f$ monoton fogyó ($\searrow$), ha $\forall x, t \in D_f,\ x < t : f(x) \geq f(t)$.
Amennyiben $f(x) > f(t)$, akkor $f$ szigorúan monoton fogyó ($\downarrow$).

**Derivált és monotonitás kapcsolata**

$I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R},\ f \in D$
$\Rightarrow$

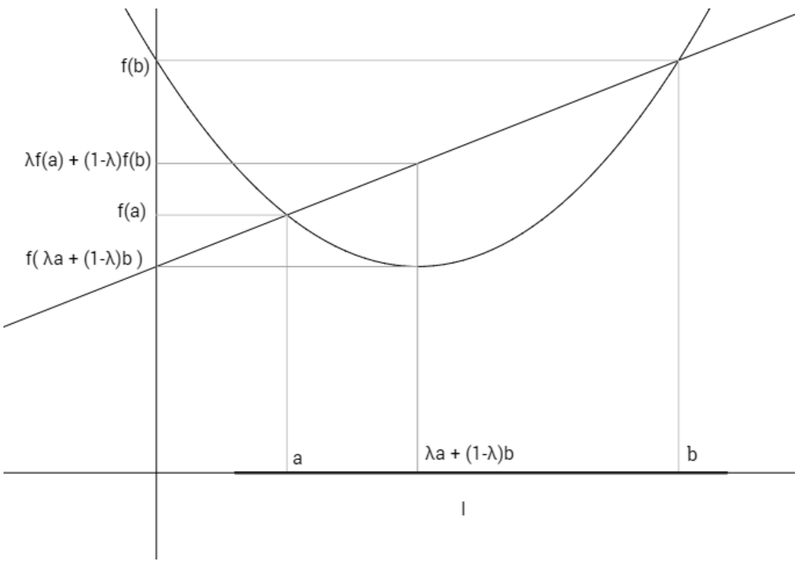
1. $f \nearrow \Leftrightarrow\ f' \geq 0$
2. $f \searrow \Leftrightarrow\ f' \leq 0$
3. $f\ konstans\ \Leftrightarrow\ \forall x \in I : f'(x) = 0$
4. $\forall x \in I : f'(x) > 0\ \Rightarrow\ f \uparrow$
5. $\forall x \in I : f'(x) < 0\ \Rightarrow\ f \downarrow$

## 4.3 Alaki viszonyok

**Konvexitás, konkávitás**

$I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$

- $f$ konvex, ha
  $\forall a, b \in I \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1 : f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$
- $f$ konkáv, ha
  $\forall a, b \in I \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1 : f(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$




ábra 1: Konvex függvény

**Konvexitás és derivált**

$I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R},\ f \in D$

- $f$ konvex $\Leftrightarrow f' \nearrow$

- $f$ konkáv $\Leftrightarrow f' \searrow$

**Inflexió**

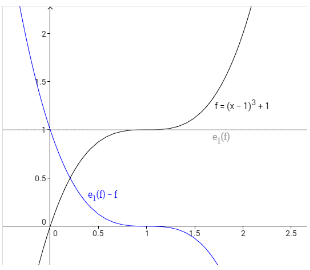
$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in intD_f,\ f \in D\{a\}$:

**Pontbeli érintő**

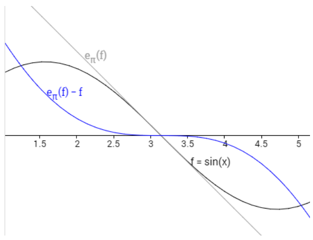
$e_a(x) := f(a) + f'(a)(x - a) \quad (x \in \mathbb{R})$

**Inflexió**

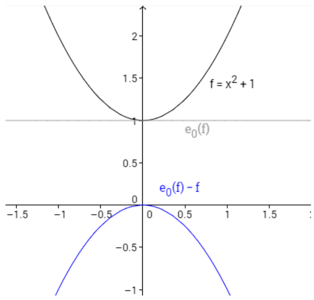
$f$-nek az $a$-ban inflexiója van, ha az $f - e_a(f)$ az $a$-ban jelet vált.




(a) $x^3$ függvény inflexiója




(b) szinusz függvény inflexiója




(c) $x^2$-nek nincs inflexiója

## 4.4 Többször differenciálható függvények

**Második derivált**

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in intD_f$, és

$f \in D\{x\} \quad (x \in K_r(a), r > 0)$, illetve $f' \in D\{a\}$

Ekkor $f$ az $a$-ban kétszer deriválható és $f''(a) := (f')'(a)$ az $f$ második deriváltja.

**Differenciálás magasabb rendben**

Hasonlóképpen az előzőhöz:

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in intD_f$, és

$f \in D^n\{x\} \quad (x \in K_r(a), r > 0)$, illetve $f^{(n)} \in D\{a\},\ (1 \le n \in \mathbb{N})$

Ekkor $f$ az $a$-ban $(n+1)$-szer deriválható és $f^{(n+1)}(a) := (f^{(n)})'(a)$ az $f$ $(n+1)$-edik deriváltja.

**Másodrendű elégséges feltétel (lokális szélsőérték létezésére)**

$f \in D^2\{a\}$ függvényre $f'(a) = 0$ és $f''(a) \neq 0$

$\Rightarrow f$-nek az $a$-ban szigorú lokális szélsőértéke van.

Ha $f''(a) < 0 \Rightarrow$ szigorú lokális maximum.

Ha $f''(a) > 0 \Rightarrow$ szigorú lokális minimum.

# 5 Riemann-integrál, parciális integrálás, integrálás helyettesítéssel.

**Primitív függvény**

$I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in I \to \mathbb{R}$

Ha $\exists F : I \to \mathbb{R}$, hogy $F \in D,\ F' = f$

akkor $F$ az $f$ primitív függvénye.

**Határozatlan integrál**

Legyen $\int f := \int f(x)dx := \{F : I \to \mathbb{R}, F \in D \text{ és } F' = f\}$ az f határozatlan integrálja.

**Határozott integrál (Riemann-integrál)**

$-\infty < a < b < \infty$ , $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f$ korlátos

- A $\tau \subset [a, b]$ felosztása, ha $\tau$ véges és $a, b \in \tau$
  Ekkor $\tau = \{x_0, x_1, ..., x_n\}(n \in \mathbb{N})$, ahol $a := x_0 < x_1 < ... < x_n := b$

- $m_i := m_i(f) := inf\{f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\}(i = 0..n-1)$, illetve
  $M_i := M_i(f) := sup\{f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\}(i = 0..n-1)$
  és:
  $s(f,\tau) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$ - alsó összeg
  $S(f,\tau) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$ - felső összeg
- $\mathfrak{F} := \{\tau \subset [a,b]$ felosztás $\}$
- Az $\{s(f,\tau) : \tau \in \mathfrak{F}\}$ felülről korlátos és $\forall \mu \in \mathfrak{F} : S(f,\mu)$ felső korlát, illetve
  Az $\{S(f,\tau) : \tau \in \mathfrak{F}\}$ alulról korlátos és $\forall \mu \in \mathfrak{F} : s(f,\mu)$ alsó korlát
- Tehát legyen:
  $I_*(f) := sup\{s(f,\tau) : \tau \in \mathfrak{F}\}$ - Darboux alsó index, és
  $I^*(f) := inf\{S(f,\tau) : \tau \in \mathfrak{F}\}$ - Darboux felső index

$\Rightarrow \forall \tau, \mu \in \mathfrak{F} : s(f,\tau) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S(f,\mu)$

Az $f$ függvény Riemann-integrálható ($f \in R[a,b]$), ha $I_*(f) = I^*(f)$, ekkor legyen
$\int_a^b f := \int_{[a,b]} f := \int_a^b f(x)dx := I_*(f) = I^*(f)$ az $f$ függvény Riemann-integrálja (határozott integrálja).

**Parciális integrálás**

- Határozatlan esetben
  $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$, $f, g \in D$ és
  $fg'$-nek van primitív függvénye (azaz $\int fg' \neq \emptyset$)
  $\Rightarrow \int f'g \neq \emptyset$ és $\int f'g = fg - \int fg'$
- Határozott esetben
  $f, g \in D[a,b]$
  $f'g, fg' \in R[a,b]$
  $\Rightarrow \int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg'$

**Integrálás helyettesítéssel**

- Határozatlan esetben
  $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $g : I \to J, g \in D, f : J \to \mathbb{R}, \int f \neq \emptyset$
  $\Rightarrow \int f \circ g \cdot g' \neq \emptyset$ és $(\int f) \circ g = \int (f \circ g \cdot g')$
- Határozott esetben
  $f \in C[a,b], g : [\alpha,\beta] \to [a,b], g \in C^1[\alpha,\beta]$,
  $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$
  $\Rightarrow \int_a^b f = \int_\alpha^\beta (f \circ g \cdot g')$

# 6 Newton-Leibniz-formula

$f \in R[a,b], \exists F : [a,b] \to \mathbb{R}, F$ folytonos és $F \in D\{x\}, F'(x) = f(x), (a < x < b)$
$\Rightarrow \int_a^b f = F(b) - F(a)$