ELTE IK - Programtervező Informatikus BSc

Záróvizsga tételek

2.1 Differenciálegyenletek

1 A kezdeti érték probléma

Differenciál egyenlet

$0 < n \in \mathbb{N},\ I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum,
$\Omega := I_1 \times ... \times I_n \subset \mathbb{R}^n$, ahol $I_1, ..., I_n \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum
$f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n,\ f \in C$

Határozzuk meg a $\varphi \in I \to \Omega$ függvényt úgy, hogy:

- D_φ nyílt intervallum
- $\varphi \in D$
- $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (x \in D_\varphi)$

Ezt a feladatot nevezzük differenciál egyenletnek.

Kezdeti érték probléma

Ha az előzőekhez még adottak: $\tau \in I$, és $\xi \in \Omega$
Illetve a φ függvényre még teljesül:

- $\tau \in D_\varphi$ és $\varphi(\tau) = \xi$

Akkor kezdeti érték problémának (Cauchy feladatnak) nevezzük.

2 Lineáris, ill. magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek

2.1 Lineáris differenciálegyenletek

Definíció

A lineáris differenciálegyenlet olyan differenciálegyenlet, melyre:
$n = 1, \quad I, I_1 \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $f : I \times I_1 \to \mathbb{R}$, ahol
$g, h : I \to \mathbb{R},\ g, h \in C,\ I_1 := \mathbb{R}$ és
$f(x, y) := g(x) \cdot y + h(x) \quad (x \in I, y \in I_1 = \mathbb{R})$
$\Rightarrow \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) = g(x) \cdot \varphi(x) + h(x) \quad (x \in D_\varphi)$

Homogenitás

A lineáris differenciálegyenlet homogén ha $h \equiv 0$ (különben inhomogén)

Kezdeti érték probléma

- Minden lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdeti érték probléma megoldható és $\forall \varphi, \psi$ megoldásokra: $\varphi(t) = \psi(t) \quad (t \in D_\varphi \cap D_\psi)$
- Minden homogén lineáris differenciálegyenlet ($\varphi : I \to \mathbb{R}$) megoldása a következő alakú: $c\varphi_0$, ahol
  $c \in \mathbb{R}$ és $\varphi_0(t) = e^{G(t)} \quad (G : I \to \mathbb{R},\ G \in D$, és $G' = g)$
- Állandók variálásának módszere:
  $\exists m : I \to \mathbb{R},\ m \in D : m \cdot \varphi_0$ megoldása az (inhomogén) lineáris differenciálegyenletnek

- Partikuláris megoldás:
  $M := \{\varphi : I \to \mathbb{R} : \varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t) + h(t)\ (t \in I)\}$
  $M_h := \{\varphi : I \to \mathbb{R} : \varphi'(t) = g(t) \cdot \varphi(t)\ (t \in I)\}$
  $\Rightarrow \forall \psi \in M : M = \psi + M_h = \{\varphi + \psi : \varphi \in M_h\}$
  (És itt ψ az előzőek alapján $m \cdot \varphi_0$ alakban írható)
- Példa: Radioaktív bomlás:
  $m_0 > 0$ - kezdeti anyagmennyiség
  $m \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - tömeg-idő függvénye, ahol
  $m(t)$ - a meglévő anyag mennyisége
  $m \in D \Rightarrow \dfrac{m(t) - m(t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (\Delta t \neq 0)$ - átlagos bomlási sebesség
  $\dfrac{m(t) - m(t + \Delta t)}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} -m'(t)$, ami megfigyelés alapján $\approx m(t)$

  azaz:
  $m'(t) = -\alpha \cdot m(t) \quad (t \in \mathbb{R}, 0 < \alpha \in \mathbb{R})$
  $m(0) = m_0$

  Homogén lineáris differenciálegyenlet (kezdeti érték probléma):
  $g \equiv -\alpha,\ \tau := 0,\ \xi := m_0$
  $\Rightarrow G(t) = -\alpha t \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow \varphi_0(t) = e^{-\alpha t} \quad (t \in \mathbb{R})$
  $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : m(t) = c \cdot e^{-\alpha t} \quad (t \in \mathbb{R})$, ahol
  $m(0) = c = m_0 \Longrightarrow m(t) = m_0 e^{-\alpha t} \quad (t \in \mathbb{R})$
  Ha $T \in \mathbb{R} : m(T) = \dfrac{m_0}{2}$ (felezési idő)
  $\Rightarrow \dfrac{m_0}{2} = m_0 e^{-\alpha T} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = e^{-\alpha T} \Rightarrow e^{\alpha T} = 2$
  $\Rightarrow T = \dfrac{ln(2)}{\alpha}$

2.2 Magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek

Definíció

$0 < n \in \mathbb{N}, I \subset \mathbb{R}$ nyílt, $a_0, ..., a_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ folytonos és $c : I \to \mathbb{R}$ folytonos.
Keressünk olyan $\varphi \in I \to \mathbb{K}$ függvényt, melyre:

- $\varphi \in D^n$
- D_φ nyílt intervallum
- $\varphi^{(n)}(x) + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k(x) \cdot \varphi^{(k)}(x) = c(x) \quad (x \in D_\varphi)$

Ezt n-edrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük. ($n = 1$ esetben Lineáris diff. egyenlet).
Ha még:
$\tau \in I,\ \xi_0, ..., \xi_{n-1} \in \mathbb{K}$ és

- $\tau \in D_\varphi$ és $\varphi^{(k)}(\tau) = \xi_k \quad (k = 0...n-1)$

Akkor Kezdeti érték problémáról beszélünk.

Homogenitás

Amennyiben $c(x) = 0$ homogén n-edrendű lineáris differenciálegyenletről beszélünk. Tehát homogén és inhomogén egyenletek megoldásainak halmazai:
$M_h := \{\varphi : I \to \mathbb{K} : \varphi \in D^n,\ \varphi^{(n)} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)} = 0\}$
$M := \{\varphi : I \to \mathbb{K} : \varphi \in D^n,\ \varphi^{(n)} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \varphi^{(k)} = c\}$
(Itt M_h n-dimenziós lineáris tér, így valamilyen $\varphi_1, ..., \varphi_n \in M_h$ bázist, más néven alaprendszert alkot.)

Állandó együtthatós eset

Ebben az esetben $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$

- Karakterisztikus polinom szerepe
  Legyen $P(t) := t^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k t^k \quad (t \in \mathbb{K})$ karakterisztikus polinom és
  $\varphi_\lambda(x) := e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{K})$

  Ekkor: $\varphi_\lambda \in M_h \Longleftrightarrow P(\lambda) = 0$
  Sőt ha λ r-szeres gyöke P-nek, és
  $\varphi_{\lambda,j}(x) := x^j e^{\lambda x}$ $(j = 0..r-1, x \in \mathbb{R})$, akkor: $\varphi_{\lambda,j} \in M_h \Longleftrightarrow \varphi_{\lambda,j}^{(n)} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_{\lambda,j}^{(k)}$
  azaz $P(\lambda)^{(j)} = 0 \quad (j = 0..r-1)$
- Valós megoldások
  Legyen $\lambda = u + iv \quad (u, v \in \mathbb{R}, v \neq 0, i^2 = -1)$
  $\Rightarrow$ az $x \mapsto x^j e^{ux} cos(vx)$, és $x \mapsto x^j e^{ux} sin(vx)$ függvények valós alaprendszert (bázist) alkotnak (M_h-ban)

Példa: Rezgések

Írjuk le egy egyenes mentén, rögzített pont körül rezgőmozgást végző m tömegű tömegpont mozgását, ha ismerjük a megfigyelés kezdetekor elfoglalt helyét és az akkori sebességét!
$\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi \in D^2$: kitérés-idő függvény
$m > 0$: tömeg
$F \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: kitérítő erő
$\alpha > 0$: visszatérítő erő, mely arányos φ-vel
$\beta \geq 0$: fékezőerő, mely arányos a sebességgel.
$\Longrightarrow$ (Newton-féle mozgástörvény alapján):
$m \cdot \varphi'' = F - \alpha\varphi - \beta\varphi'$
$\varphi(0) = s_0, \varphi'(0) = s_0'$

Másodrendű lineáris differenciál egyenlet (kezdeti érték probléma)
Standard alakba írva: $\varphi'' + \frac{\beta}{m}\varphi' + \frac{\alpha}{m}\varphi = \frac{F}{m}$
Tekintsük kényszerrezgésnek a periodikus külső kényszert, amikor:
$\frac{F(x)}{m} = Asin(\omega x) \quad [A > 0$ (amplitúdó), $\omega > 0$ (kényszerfrekvencia)$]$
Ekkor $\omega_0 := \sqrt{\frac{\beta}{m}}$ - saját frekvencia
és $\varphi''(x) + \omega_0^2 \varphi(x) = Asin(\omega x)$
Melynek karakterisztikus polinomja : $P(t) = t^2 + \omega_0^2 \quad (t \in \mathbb{R})$
Megoldásai: $\lambda = \pm\, \omega_0 i$

Korábban láttuk, hogy ha $\lambda = u + iv$ akkor $x \mapsto x^j e^{ux} cos(vx)$, és $x \mapsto x^j e^{ux} sin(vx)$ függvények valós alaprendszert (bázist) alkotnak (M_h-ban). Így $\varphi(x) = c_1 cos(\omega_0 x) + c_2 sin(\omega_0 x)$ alakban írható mely fázisszög segítségével: $d \cdot sin(\omega_0 x + \delta) \quad (d = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \delta \in \mathbb{R})$ alakra átírható. Így:
$M_h = \{d \cdot sin(\omega_0 x + \delta)\}$

Ekkor már könnyen megadhatunk egy partikuláris megoldást:

- $\omega \neq \omega_0$ esetén partikuláris megoldás:
  $x \to q \cdot sin(\omega x)$
  És $q = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}$ kielégíti a $-q\omega^2 sin(\omega x) + \omega_0^2 q \cdot sin(\omega x) = Asin(\omega x)$ egyenletet. Tehát:
  $\varphi(x) = d \cdot sin(\omega_0 x + \delta) + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} sin(\omega x)$ megoldás két harmonikus rezgés összege.
- $\omega = \omega_0$ (rezonancia) esetén partikuláris megoldás:
  $x \to qx \cdot cos(\omega x)$
  És $q = \frac{-A}{2\omega}$ kielégíti a $-2q\omega \cdot sin(\omega x) - q\omega^2 x \cdot cos(\omega x) + \omega^2 qx \cdot cos(\omega x) = Asin(\omega x)$ egyenletet.
  Tehát:
  $\varphi(x) = d \cdot sin(\omega x + \delta) - \frac{A}{2\omega} x \cdot cos(\omega x)$ megoldás egy harmonikus és egy aperiodikus rezgés összege.

(Ebben az esetben az idő (x) elteltével a φ értéke nő. Bizonyos modellekben ez a "rendszer szétesését" idézi elő)