1. tétel

Sorozatok, sorok, függvények határértéke és folytonossága

Leindler – Schipp - Analízis I. könyve + jegyzetek, kidolgozások alapján

Számsorozatok, vektorsorozatok konvergenciája

Def.: Számsorozatok értelmezése:

A természetes számok halmazán értelmezett függvényt sorozatnak nevezzük.

Ha a szóban forgó függvény értékkészlete $\mathbb{R}$-nek egy részhalmaza, akkor **valós számsorozatról**, ha $\mathbb{C}$-nek egy részhalmaza, akkor **komplex számsorozatról** szokás beszélni.

Az olyan sorozatokat amelyek értékkészlete $\mathbb{R}^n$ (n-dimenziós euklideszi tér) egy részhalmaza $\mathbb{R}^n$-beli **vektorsorozatoknak** nevezzük.

Az *a* sorozattal az $n \in \mathbb{N}$ számhoz rendelt értéket a **sorozat n-edik tagjának**, vagy a sorozat *n* helyen felvett értékének nevezzük.

Def.: Az olyan sorozatot, amelynek értékei azonos értelmezési tartománnyal rendelkező függvények, **függvénysorozatnak** nevezzük.

Def.: Korlátosság

Akkor mondjuk, hogy az $a = (a_n)$ valós vagy komplex számsorozat felülről (*alulról*) **korlátos**, ha létezik olyan K (*k*) szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ indexre fenáll az $|a_n| \le K$ egyenlőtlenség, azaz:

$\exists K \in \mathbb{R}$ hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \le K$ ($\exists k \in \mathbb{R}$ *hogy* $\forall n \in \mathbb{N}$ $k \le a_n$). A K (*k*) számot a sorozat felső (*alsó*) korlátjának nevezzük.

Def.: Az (a_n) valós számsorozatot **konvergensnek** nevezzük, ha létezik olyan $A \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy ennek minden $\varepsilon > 0$ sugarú környezetéhez létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy a sorozat minden n_0-nál nagyobb vagy egyenlő indexű a_n tagja benne van az A szám ε sugarú környezetében, azaz

$\exists A \in \mathbb{R}$, hogy $\forall \varepsilon > 0$ valós számhoz $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n \ge n_0$ indexre $|a_n - A| < \varepsilon$.

Tétel: Ha az (a_n): $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat konvergens, akkor egyetlen olyan $A \in \mathbb{R}$ szám létezik, amelyre a konvergencia (előző def.) teljesül. Ezt az A számot az (a_n) sorozat **határétékének** nevezzük: $\lim a_n := A$ $(n \to \infty)$

Def.: Ha az (a_n) sorozat nem konvergens, akkor **divergensnek** nevezzük.

Def.: Normált tér

Az $(X, \|.\|)$ normált tér, ha

1. X lineáris tér $\mathbb{R}$ felett

2. $||.||: X \to \mathbb{R}$ függvény, melyre:

   a) $||x|| \geq 0$ $(\forall x \in X)$

   b) $\forall x \in X$: $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

   c) $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén $||\lambda x|| = \lambda ||x||$

   d) $\forall x,y \in X$ esetén $||x||+||y|| \geq ||x+y||$

Def.: Az $(\mathbb{R}^n, ||.||)$ normált térben az (a_n): $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ vektorsorozat **konvergens**, ha

$\exists L \in \mathbb{R}^n$: $\forall \varepsilon > 0$ valós számhoz $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n \geq n_0$ indexre $||L-a_n|| < \varepsilon$.

Belátható, hogy normált terekben bármely két norma ekvivalens, ezért a definicióban mindegy, hogy melyik normát használjuk.

Def.: Az olyan konvergens (a_n) számsorozatot, amelyre $\lim a_n = 0$, **nullsorozatnak** vagy zérussorozatnak nevezzük.

Def.: Tágabb értelemben vett határérték

Akkor mondjuk, hogy valós (a_n) számsorozatnak $+\infty$ $(-\infty)$ a határértéke, ha bármilyen $P \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ indexre $a_n > P$ $(a_n < P)$.

Def.: Tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra a $K_\varepsilon(+\infty) := (1/\varepsilon, +\infty)$ ($K_\varepsilon(-\infty) := (-\infty, -1/\varepsilon)$) halmazt a $+\infty$ $(-\infty)$ $1/\varepsilon$ kezdőpontú $(-1/\varepsilon$ végpontú) "**környezetének**" nevezzük.

Def.: Sorozat limesz szuperiorja és limesz inferiorja
Tetszőleges $a=(a_n)$ valós számsorozatra legyen
$\overline{\lim}\, a_n = \lim\sup a_n :=$

- ha a felülről nem korlátos, akkor $+\infty$
- különben $\lim A_n$

$\underline{\lim}\, a_n = \lim\inf a_n :=$

- ha a alulról nem korlátos, akkor $-\infty$
- különben $\lim B_n$, ahol

$A_n = \sup \{ a_k : k=n,n+1,n+2, \ldots\}$
$B_n = \inf \{ a_k : k=n,n+1,n+2, \ldots\}$

Tétel: Legyen $a=(a_n)$ egy valós számsorozat. Ekkor tetszőleges $K < \overline{\lim}\, a$ $(k > \underline{\lim}\, a)$ számnál a-nak végtelen sok tagja nagyobb (kisebb) és minden $L > \overline{\lim}\, a$ $(l < \underline{\lim}\, a)$ számnál a-nak csak véges sok tagja nagyobb (kisebb).

Az a sorozatnak akkor és csak akkor van határértéke, ha $\overline{\lim}\, a = \underline{\lim}\, a = \lim a$.

Monoton sorozatok

Def.: Az $a = (a_n)$ valós számsorozatot novekedőnek (csökkenőnek) nevezzük, ha minden $n \in \mathbb{N}$ indexre $a_n \leq a_{n+1}$ $(a_n \geq a_{n+1})$. Ha minden n természetes számra $a_n < a_{n+1}$ $(a_n > a_{n+1})$ teljesül, akkor az (a_n) sorozatot szigorúan növekedőnek (szigorúan fogyónak, vagy szigorúan csökkenőnek) nevezzük. A növekedő vagy csökkenő sorozatokat tágabb értelemben **monoton**, a szigorúan növekedő vagy csökkenő sorozatokat szigorúan monoton sorozatoknak nevezzük.

Jelölések: $(a_n)\uparrow$ -szig. monton növő, $(a_n)\downarrow$ -szig. monoton fogyó, $(a_n)\nearrow$ - monoton növő, $(a_n)\searrow$ - monoton fogyó

Tétel: Ha az (a_n) valós számsorozat monoton növekedő (fogyó), és korlátos, akkor **konvergens**, és

$$\lim a_n = \sup a_n \ (\lim a_n = \inf a_n)$$

Biz.: Legyen $\sup a_n =: A$. Ekkor – a felső határ értelmezése alapján – minden $n\in\mathbb{N}$ számra $a_n \le A$ és tetszőleges $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $N\in\mathbb{N}$, hogy $a_N > A-\varepsilon$. Mivel (a_n)monoton növekedő, azért minden $n \ge N$ indexre is $a_n > A-\varepsilon$ teljesül. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n \ge N\ A-\varepsilon< a_n \le A,$$

ez pedig azt jelenti, hogy $\lim a_n = A$.
Monoton csökkenő sorozatra analóg módon bizonyítható.

A végtelen numerikus sor fogalma és konvergenciája

Legyen $a=(a_n)$ egy valós vagy komplex számsorozat. Az $a_1+a_2+a_3\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (ezentúl csak: $\sum a_n$) szimbólumot ("formális végtelen összeget") **végtelen numerikus sor**nak, vagy végtelen számsornak nevezzük. Az a_n számot a $\sum a_n$ sor n-edik (vagy általános) tagjának nevezzük.

Def.: Az $s_n = a_1+a_2+\ldots+a_n$ $(n\in\mathbb{N})$ egyenlőséggel értelmezett (s_n) sorozatot az $\sum a_n$ sor **részletösszegei sorozatának** nevezzük.

Def.: Akkor mondjuk, hogy $\sum a_n$ sor **konvergens**, ha részletösszegeinek sorozata konvergens. A s_n részletösszegek sorozatának határértékét a $\sum a_n$ sor összegének nevezzük. Ha az (s_n) sor divergens, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor divergens.

Tétel: Cauchy-féle konvergencia-kritérium

A $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $N\in\mathbb{N}$, hogy minden $n\ge m\ge N$ indexre $|s_n-s_{m-1}| = |a_m + a_{m+1} + \ldots a_n| <\varepsilon$.

1. következmény: Ha a $\sum a_n$ sor konvergens akkor (a_n) nullsorozat.

2. következmény: Ha a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, akkor egyben konvergens is.

Def.: Akkor mondjuk, hogy $\sum a_n$ sor **abszolút konvergens**, ha $\sum|a_n|$ sor konvergens.

Pozitív tagú sorok

Def.: Ha minden n természetes számra $a_n \ge 0$, akkor a $\sum a_n$ sort **pozitív tagú sornak** nevezzük.

Ilyen sorok részletösszegeire nyilván

$$s_n= a_1+a_2+\ldots+a_n \le a_1+a_2+\ldots+a_n +a_{n+1} =s_{n+1}$$

teljesül, azért a pozitív tagú sorok részletösszegeinek sorozata monoton növekedő.

Tétel: Pozitív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha részleösszegeinek sorozata korlátos.

Legyen $\sum a_n$ és $\sum b_n$ pozitív tagú sorok és tegyük fel hogy $a_n \le b_n$. Ekkor e sorok részletösszegeire nyilván $0 \le s_n := a_1+a_2+\ldots+a_n \le b_1+b_2+\ldots+b_n =: t_n$ teljesül. Ennek alapján (t_n) korlátosságából ($\cancel{t_n}$ s_n) sorozat korlátossága is következik és megfordítva, ha (s_n) nem korlátos, akkor (t_n) sem lehet korlátos.

Ezzel az észrevétellel és az előző tétellel adódik az ún. pozitív tagú sorokra vonatkozó **Összehasonlító kritérium**: Legyen $0\le a_n \le b_n$. Ekkor, ha a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens, és ha a $\sum a_n$ sor divergens, akkor $\sum b_n$ is divergens.

Azt a tényt, hogy a $\sum a_n$ pozitív tagú sor konvergens, a $\sum a_n < \infty$ szimbólummal jelöljük.

Gyök- és hányados-kritérium

<u>Cauchy-féle gyökkritérium:</u> Ha a $\sum a_n$ sorra $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} <1$, akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens, $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} >1$ akkor $\sum a_n$ divergens. ($\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} =1$ határozatlan eset)

Biz.: Tfh. $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}<1$ és tekintsünk egy olyan q számot, amelyre $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}<q<1$ teljesül. Ekkor a felső határérték ismert tulajdonsága miatt $\sqrt[n]{|a_n|}< q$, vagy ami ezzel ekvivalens $|a_n| < q^n$ $(0\le q<1)$ majdnem minden n-re. Innen a korábban említett összehasonlító kritérium alkalmazásával azt kapjuk, hogy ha $|a_n| \le q^n$ majdnem minden n-re és $\sum q^n < \infty$, akkor az $\sum a_n$ abszolút konvergens.

Ha $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}>1$ a felső határértékre vonatkozó tétel szerint $\sqrt[n]{|a_n|}>1$ végtelen sok n-re. Ebből következik, hogy $|a_n| >1$ is végtelen sok n-re teljesül, azért (a_n) nem zérussorozat, következésképpen $\sum a_n$ divergens.

<u>D'Alambert-féle hányados kritérium:</u> Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ sor tagjaira, $a_n \ne 0$.

- Ha $\overline{\lim}|a_{n+1}|/|a_n| <1$ akkor $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, ha pedig
- $\underline{\lim}|a_{n+1}|/|a_n| >1$, akkor $\sum a_n$ divergens.
- $\underline{\lim}|a_{n+1}|/|a_n| \le 1 \le \overline{\lim}|a_{n+1}|/|a_n|$ határozatlan eset.

Biz.: Tegyük fel először, hogy $\overline{\lim}|a_{n+1}|/|a_n| <1$ és legyen q olyan szám, amelyre $\overline{\lim}|a_{n+1}|/|a_n| <q<1$. Ekkor a felső határérték tulajdonsága alapján létezik olyan $N\in \mathbb{N}$ index, hogy $|a_{N+r}|\le|a_{N+r-1}|*q$ $(r\in \mathbb{N})$. Ha a most kapott első n egyenlőtlenséget összeszorozzuk, akkor az

$$|a_{N+1}|*|a_{N+2}| \ldots |a_{N+n}| \le |a_N|*|a_{N+1}| \ldots |a_{N+n-1}|*q^n$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ahonnan egyszerűsítés után $|a_{N+n}|\le|a_N|*q^n$ adódik. Innen a már korábban említett összehasonlító kritérium alapján az állítás első része következik.

Legyen most $\underline{\lim}|a_{n+1}|/|a_n| >1$ és válasszuk a q számot úgy, hogy $\underline{\lim}|a_{n+1}|/|a_n| >q>1$ teljesüljön. Innen – az also határérték ismert tulajdonsága alapján – következik, hogy van olyan $N \in \mathbb{N}$ szám, hogy minden $r \in \mathbb{N}$ indexre $|a_{N+r}| \geq |a_{N+r-1}| > |a_{N+r}|$, vagyis az $(|a_n|)$ sorozat a N indextől kezdve monoton növő. Innen következik, hogy $\lim a_n \neq 0$, ezért $\sum a_n$ divergens.

Leibniz-típusú sorok

Def.: Legyen $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$. Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n$

(ún. váltakozó előjelű) sort Leibniz-típusú sornak nevezzük.

Tétel: A Leibniz-típusú sor akkor és csak akkor konvergens, ha $\lim a_n = 0$.

(Biz.: Leindler-Schipp – Analízis I. 77. oldal, ha kéritek leírom kézzel)

A hatványsor fogalma

Legyen $x, x_0 \in \mathbb{K}$ és $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ $(a_n \in \mathbb{K})$ egy tetszőleges sorozat. Az

$$a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad (*)$$

alakú végtelen sort **hatványsornak** nevezzük. Az a_i $(i = 0,1,2,\ldots)$ számokat a hatványsor **együtthatóinak**, az x_0 számot a hatványsor **középpontjának**, az x-et pedig a hatványsor **változójának** szokás nevezni.

Cauchy-Hadamard –tétel:

Tétel: Legyen

$R :=$

- 0, ha $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$
- $+\infty$, ha $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$
- $1/\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$, különben.

Ekkor a

$$K_R(x_0) := \{x \in \mathbb{K} : |x - x_0| < R\}$$

halmaz pontjaiban az (*) sor abszolút konvergens, $|x - x_0| > R$ esetén pedig divergens.

Biz.: Legyen először $|x - x_0| < R$ és alkalmazzuk a Cauchy-féle gyökkritériumot a (*) sorra. Mivel

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = |x - x_0| \lim \sqrt[n]{|a_n|} = |x - x_0| / R < 1,$$

azért $\sum_{n=0} |a_n| \, |x - x_0|^n$ konvergens. Ezzel a tétel első állítását igazoltuk.

Ha $|x - x_0| > R$, akkor – ismét alkalmazva a gyökkritériumot – azt kapjuk, hogy

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = |x - x_0| / R > 1$$

következésképpen ebben az esetben (*) valóban divergens.

A K_R (x_0) környezetet az (*) hatványsor **konvergencia tartományának**, az R-et pedig **a konvergencia sugarának** nevezik.

Következmények:

1) Ha R a (*) hatványsor konvergencia sugara és 0<r<R, akkor a $\sum_{n=0} |a_n| r^n$ sor konvergens.
2) Ha valamely $x_1 \in \mathbb{K}$ pontban a (*) hatványsor konvergens, akkor $|x_0 - x_1| \leq R$.

Vektor-vektor függvények határértéke és folytonossága

Def.: Az $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (n, m>0) függvény **<u>folytonos</u>** $a \in D_f$ pontban, ha

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x \in K_\delta(a) \cap D_f \text{ esetén } f(x) \in K_\varepsilon(f(a)).$$

Def.: Legyen $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (n, m>0) függvény és folytonos az $a \in D_f$ pontban. Azt mondjuk, hogy $\exists \lim f$ **<u>határérték</u>**, és $\lim f = L \in \mathbb{R}^n$, ha

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x \in (K_\delta(a)\setminus\{a\}) \cap D_f \text{ esetén } f(x) \in K_\varepsilon(L).$$

Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai:

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$

Def.: A H halmazt **<u>zárt</u>** halmaznak nevezzük, ha bármely, H elemeiből alkotott konvergens sorozat határértéke is H-hoz tartozik.

Def.: Akkor mondjuk, hogy a $\mathbb{K}$ valamely H részhalmaza **<u>kompakt</u>**, ha H korlátos és zárt halmaz.

Tétel: Ha $H \subset \mathbb{K}_1$ kompakt és $f: H \rightarrow \mathbb{K}_2$ folytonos függvény, akkor R_f (a fv. értékkészlete) is kompakt.

- *Heine – tétel*

  Def.: Akkor mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_2$ függvény a $H \subset D_f$ halmazon **egyenletesen folytonos**, ha

  $$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in: |x-y|<\delta: |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

  Heine – tétel: Ha $H \subset \mathbb{K}_1$ kompakt halmaz és és $f: H \rightarrow \mathbb{K}_2$ folytonos függvény, akkor f a H halmazon egyenletesen folytonos.

- *Weierstrass-tétel*

  Weierstrass-tétel: Ha $H \subset \mathbb{K}$ kompakt halmaz és $f:H \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f-nek van maximuma és minimuma.

- *Az inverz függvény folytonossága*

  Tétel: Legyen $H_1 \subset \mathbb{K}_1$ kompakt, $f:H_1 \to H_2 \subset \mathbb{K}_2$ pedig egy folytonos bijektív leképezés. Ekkor az $f^{-1}:H_2 \to H_1$ függvény is folytonos.

Bolzano – tétel

Bolzano – tétel: Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ és $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f minden f(a) és f(b) közé eső értéket felvesz, azaz ha pl.: $f(a)<f(b)$, akkor

$$\forall c \in (f(a),f(b))\ \exists \xi \in (a,b):\ f(\xi) = c.$$

Ez a tétel egyszerű következménye a következő lemmának:

Lemma: Ha a $\varphi:[a,b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és $\varphi(a)<0<\varphi(b)$, akkor van olyan $\xi \in (a,b)$ szám, hogy $\varphi(\xi)=0$.