2 - Differenciálszámítás, integrálszámítás és alkalmazásaik. Készítette: S.R.

Vektor-Vektor függvények differenciálhatósága:

Totális derivált: Az $f \in R^n \to R^m$ fv. deriválható az $a \in intD_f$ pontban, ha létezik $L \in \alpha(R^n, R^m)$ lineáris leképezés, melyre

$$\left(\substack{lim \\ h\to 0}\right) \frac{||f(a+h)-f(a)-L(h)||}{||h||} = 0$$

Megjegyzés: A deriválhatóság ténye független a normák megválasztásától.

Derivált-mátrix:
A deriválhatóság ekvivalens átfogalmazása:
Az $f \in R^n \to R^m$ fv. deriválható az $a \in intD_f$ pontban, ha létezik $A \in R^{m\times n}$ mátrix, melyre

$$\left(\substack{lim \\ h\to 0}\right) \frac{||f(a+h)-f(a)-A*h||}{||h||} = 0$$

$f'(a) = A$ -t deriváltmátrixnak nevezzük. Belátható, hogy ha egy fv. deriválható az a pontban, akkor folytonos is.

Parciálisan $f \in R^n \to R$ fv.-ek deriváltja:

Parciális derivált:
Legyen $f \in R^n \to R$ fv., $a \in intD_f$ és tekintsük az $e_1, ...e_n \in R^n$ kanonikus egységvektorokat. Az f fv.nek létezik az i. változó szerinti parciális deriváltja, ha:

- $F : k(a) \ni t \to f(a + t * e_i)$ fv-re: $F \in D(a)$. Ekkor az i. derivált:
- $\delta_i f(a) := F(a)$

Derivált-mátrix előállítása parciális deriváltakkal:
Legyen $f \in R^n \to R^m$, $a \in intD_f$,

$$f = \begin{vmatrix} f_1 \\ ... \\ f_n \end{vmatrix} : f_i \in R^n \to R$$

koordináta függvény. Ha $f \in D(a)$, akkor

$$f'(a) = \begin{vmatrix} \delta_1 f_1(a) & \delta_2 f_1(a) & ... & \delta_n f_1(a) \\ ... & ... & ... & ... \\ \delta_1 f_m(a) & \delta_2 f_m(a) & ... & \delta_n f_m(a) \end{vmatrix} \in R^{m\times n}$$

a derivált mátrix (Jacobi mátrix).
Belátható, hogy ha léteznek és folytonosak a parciális deriváltak egy pontban, akkor abban a pontban a fv. totálisan deriválható.

Vektor-vektor fv.ek deriválása:

Halmaz belső pontja:
A $0 \neq A \subset R$ halmaz belső pontja $a \in A$, ha létezik $\delta > 0 : k_\delta(a) \subseteq A$.
Jele: $intA := a \in A | letezik \delta > 0 : k_\delta(a) \subseteq A$

Differenciálhatóság:
Az $f \in R \to R$ fv. differenciálható az $a \in intD_F$ pontban, ha létezik és véges a

$$\binom{lim}{h \to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right) =: f'(a) \text{ határérték,}$$

melyet az f deriváltjának hívunk. Belátható, hogy a deriválhatóságból következik a folytonosság.

Differenciálási szabályok:
Legyenek $f, g \in R \to R$, $a \in intD_f \cap intD_g$ és t.f.h. $f, g \in D(a)$. Ekkor:

1. $f \pm g \in D(a)$ és $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$
2. $f * g \in D(a)$ és $(f * g)'(a) = f'(a) * g(a) + f(a) * g'(a)$
3. $\lambda * f \in D(a)$ és $(\lambda * f)'(a) = \lambda * f'(a)$
4. $g(a) \neq 0$ esetén $\frac{f}{g} \in D(a)$ és $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)*g(a)-f(a)*g'(a)}{(g(a))^2}$

Összetett függvény deriváltja:
$f, g \in R \to R$, $\Omega_g \subset D_f$, $g \in D(a)$ és $f \in Dg(a)$. Ekkor $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) * g'(a)$

Inverz függvény deriváltja:
T.f.h $f : (a, b) \to R \uparrow$, folytonos és $f \in D(\xi)$ és $f(\xi) \neq 0$. Ekkor

Létezik f^-1 és $f^-1 \in D(\eta)$ és $f(\xi) = \eta$ és $(f^-1)(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)} = \frac{1}{f'(f^-1(\eta)}$

Középérték tételek:

- **Rolle k.érték tétele:**
  T.f.h. $f \in R \to R$. Ha
  - $f \in C[a,b]$
  - $f \in D(a,b)$
  - $f(a) = f(b)$

  Ezekből következik, hogy létezik $\xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$
- **Cauchy k.érték tétele:**
  Legyenek $f, g \in R \to R$ fv-ek és t.f.h:
  - $f, g \in C[a,b]$
  - $f, g \in D(a,b)$
  - bármely $x \in (a,b) : g'(x) \neq 0$
  - $g(a) \neq g(b)$

  Ezekből következik, hogy létezik $\xi \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$
- **Lagrange k.érték tétele:**
  Legyen $f \in R \to R$ és t.f.h:
  - $f \in C[a,b]$
  - $f \in D(a,b)$

  Ezekből következik, hogy létezik $\xi \in (a,b) : f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Középértéktételek alkalmazásai:

- Belátható, hogy konstans deriváltja 0.
- Ha $f, g \in R \to R$ fv.ekre $f' \equiv g'$, akkor $f = g + c (c \in R)$ azok csak konstansban különböznek.

Differenciálszámítás alkalmazásai:
Szélsőértékek keresése:

- Az $f \subset R \to R$ fv.nek lokális szélsőértéke van az $a \in intD_f$ pontban, ha az $f'(a) = 0$ és a deriváltfüggvény előjelet vált.

- Az $f \in R^n \to R^m$ fv.nek lokális szélsőértéke van az $a \in intD_f$ pontban, ha Hasse-mátrix pozitív vagy negatív definit.

Riemann integrál

Primitív függvény:

Az $I \subset R$ intervallumon értelmezett $f : F \to R$ fv.nek primitív függvénye $F : I \to R$, ha $F \in D(I)$ és bármely $i \in I : F'(i) = f(i)$.

Riemann integrálhatóság:

Az $f : [a, b] \to R$ korlátos függvény Riemann integrálható az $[a, b]$ intervallumon, ha a Darboux féle integrálokra: $I_*(f) = I^*(f)$.
Jele: $f \in R[a, b]$, az integrálja: $\int_a^b f(x)dx$

Parciális integrálás tétele:

T.f.h.

- $f, g \in D(I)$, $x \in I$ rögzített,
- $f' * g$ fv.nek létezik primitív függvénye. Ekkor $f * g'$-nek is létezik primitív függvénye: $\int f * g' = f * g - \int f' * g$

Integrálás helyettesítéssel:

T.f.h.:

- $g : I \to R : g \in D(I)$
- létezik $J \in R : \Omega_g \in J$
- $f : J \to R$ fv-nek létezik primitív függvénye.

A fentiekből következik, hogy $f \circ g * g'$-nek is van primitív függvénye:

$$\int_{t_0} (f \circ g) * g' = \int_{g(t)} f * g$$

Newton-Leibniz formula:

Legyen $f : I \to R$. T.f.h:

- $f \in R[a, b]$
- f-nek van primitív függvénye: F

A fentiekből következik, hogy:

$$\int_a^b = F(b) - F(a)$$

Alkalmazások:

- Fv.-ek alatti terület kiszámítása (pl. fizika).
- Síkidomok területének kiszámítása.
- R^n -beli görbék ívhosszának kiszámítása.

Differenciálszámítás, integrálszámítás és alkalmazásaik (kieg.)

Iránymenti derivált

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{int} D_f$, $e = \mathbb{R}^n$, $||e||=1$, $\exists K(0) \subset \mathbb{R}$, $a+te \in D_f$ $(t \in K(0))$

$f_{e,a}: K(0) \to \mathbb{R}$, $f_{e,a}(t)=f(a+te)$

Def.: Azt mondjuk, hogy az f az a-ban az e irány mentén deriválható, ha $f_{e,a}(t) \in D(0)$.
Jelölés: $\partial_e f(a) = (f_{e,a})'(0)$
Tétel: $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in D(a) \Rightarrow \exists \partial_e f(a)$ $\forall e \in \mathbb{R}^n$, $||e||=1$ és $\partial_e f(a)=f'(a)\cdot e = <f'(a),e> = <\text{grad } f(a), e>$

Megjegyzés: Az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvények esetén az f'-t **gradiensnek** is nevezzük. Jelölése: grad f

Speciális eset: $e = e_j = (0, 0, \ldots, \underset{j}{\underline{1}}, \ldots, 0) \to$ j. dik változó
A parciális derivált egy speciális iránymenti derivált.

Terület, ívhossz, térfogat, felszín

Görbe alatti terület:
f(*x*) és *g*(*x*) függvénygörbék, valamint az $x = a$ és $x = b$ egyenesek által határolt síkidom területe:

$$\left| \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \right|$$

Ívhossz:
Ha az *f*(*x*) függvény az [*a*,*b*] intervallumon differenciálható, és *f'*(*x*) ugyanitt folytonos, akkor a függvénygörbe hosszúsága az adott intervallumon:

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dt$$

Térfogat:

Ha az *x* tengelyre forgásszimmetrikus test palástjának a tengellyel párhuzamos ívét a folytonos *f*(*x*) függvény írja le, akkor a forgástestnek a tengely [*a*,*b*] szakaszára eső térfogata:

$$\pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

Felszín:
Ha az *x* tengelyre forgásszimmetrikus test palástjának a tengellyel párhuzamos ívét a folytonos *f*(*x*) függvény írja le, akkor a tengely [*a*,*b*] szakasza körüli palást felszíne:

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

δ