9. Diffegyenlet-rendszerek

Feltételes szé.: $\emptyset \neq A \in \mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}$, $m = 1, \dots, n-1$, $g: A \to \mathbb{R}^m$
$\{g=0\} := \{\xi \in A : g(\xi) = 0\}$, $c \in \{g=0\}$

D) f-nek a $g=0$ feltétellel c-ben felt. szé.-e van, ha $f|_{\{g=0\}}$-nak is.

Implicit fv: $c=(a,b) \in \{g=0\}$ és $\exists K(a), K(b), \forall x \in K(a): \exists!\, y \in K(b): g(x,y)=0$.

D) $\varphi: K(a) \to K(b)$ úh. $\varphi(x) = y$; ez a φ a $g=0$ egyenlet által megh. implicit fv.

T) $\emptyset \neq U \in \mathbb{R}^n$, $g \in C^1$ (folyt. diffható), $c=(a,b) \in \{g=0\}$
Ha $\det \partial_2 g(c) \neq 0$, akkor $\exists \varphi$ impl. fv, $\varphi \in C^1$ és $\varphi'(x) = -\left(\partial_2 g(x,\varphi(x))\right)^{-1} \cdot \partial_1 g(x,\varphi(x))$

T) Elsőrendű szükséges felt.: $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $f: U \to \mathbb{R}$, $f \in D$, $g: U \to \mathbb{R}^m$, $g \in C^1$, $c \in \{g=0\}$,
f-nek van a c-ben $g=0$-ra vonatkozó felt. szé.-e; $\operatorname{grad} g_1(c), \dots, \operatorname{grad} g_m(c)$ lin. fgetlen.
Ekkor: $\exists \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$: $\operatorname{grad} f(c) + \sum_{i=1}^{m} \operatorname{grad} g_i(c) \cdot \lambda_i = 0$.
↳ $f_\lambda := f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i$ ↳ $\lambda_1, \dots, \lambda_m$: Lagrange-féle multiplikátorok, f_λ: Lagrange-fv.

D) Másodrendű elégséges felt.: $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $f: U \to \mathbb{R}$, $g: U \to \mathbb{R}^m$, $f, g \in C^2$, $c \in \{g=0\}$
$\operatorname{grad} g_1(c), \dots, \operatorname{grad} g_m(c)$ lin. fgetlenek, $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $f_\lambda'(c) = 0$ és Q_λ feltételesen pozitív [negatív] definit. (ahol $Q_\lambda(x) = \langle f''_\lambda(c) \cdot x, x \rangle$, poz. def: $\forall 0 \neq x \in \{\mathbb{R}^n \mid g'(c) \cdot x = 0\}$: $Q_\lambda(x) > 0$)
Ekkor f-nek c-ben $g=0$ felt.-re felt. lok. minimuma [maximuma] van.

T) Másodrendű szükséges felt.: előző fordítva: ha $\exists$ lok. szé., akkor Q_λ szemidefinit

Szeparábilis diffegyenlet: $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt int. $g: I \to \mathbb{R}$, $h: J \to \mathbb{R}$, $g, h \in C$,
$\forall x \in J: h(x) \neq 0$. Hat. meg $\varphi: I \to J$ fv-t, ha:
$|$ D_φ nyílt intervallum $|$ $\varphi \in D$ $|$ $\forall x \in D_\varphi: \varphi'(x) = g(x) h(\varphi(x))$ $|$ $\underbrace{\tau \in D_\varphi, \xi \in J \text{ adott}, \varphi(\tau) = \xi}_{\text{kezd. ért. prob.}}$

Egzakt diffegyenlet: $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt, $g, h: I \times J \to \mathbb{R}$, $g, h \in C$, $h(x,y) \neq 0$,
$\exists F: I \times J \to \mathbb{R}$: $F \in D$, $F' = (\operatorname{grad} F) = (g, h)$. Ekkor $\varphi \in I \to J$ úh.
$|$ D_φ nyílt int. $|$ $\varphi \in D$ $|$ $\forall x \in D_\varphi: \varphi'(x) := -\dfrac{g(x,\varphi(x))}{h(x,\varphi(x))}$

Lineáris diffegyenlet: $I \subset \mathbb{R}$ nyílt, $g, h: I \to \mathbb{R}$, $g, h \in C$, $\varphi: I \to \mathbb{R}$, $\varphi = ?$
$|$ D_φ nyílt int. $|$ $\varphi \in D$ $|$ $\forall x \in D_\varphi$: $\varphi'(x) = g(x)\varphi(x) + h(x)$

Módszer: partikuláris megoldás, állandók variálása

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek: $0<n\in\mathbb{N}$, $I\subset\mathbb{R}$ nyílt int., $\varphi=?$

$a_{ik}: I\to\mathbb{R}$, $a_{ik}\in C$ $(i,k=1,\dots,n)$; $A=(a_{ik})_{i,k=1}^{n} : I\to\mathbb{R}^{n\times n}$, $b: I\to\mathbb{R}^{n}$, $b\in C$

$\Big|\, D_\varphi \text{ nyílt int.} \,\Big|\, \varphi\in D \,\Big|\, \forall x\in D_\varphi : \varphi'(x)=A(x)\varphi(x)+b(x) \,\Big|\, \varphi(\tau)=\xi \Big|$, $\tau\in I$, $\xi\in\mathbb{R}^{n}$

$\mathcal{M}_h := \{\varphi: I\to\mathbb{R}^n : \varphi\in D \text{ és } \varphi'=A\varphi\}$

$\mathcal{M} := \{\varphi: I\to\mathbb{R}^n : \varphi\in D \text{ és } \varphi'=A\varphi+b\}$

T) - $\mathcal{M}_h$ n-dimenziós vektortér

- $\forall \psi\in\mathcal{M}: \mathcal{M}=\psi+\mathcal{M}_h$
- Legyen $\varphi_1,\dots,\varphi_n\in\mathcal{M}_h$ bázis (alaprendszer), ekkor $\exists\, g_1,\dots,g_n: I\to\mathbb{R} : g_1,\dots,g_n\in D$ és $\psi:=\sum_{k=1}^{n} g_k\varphi_k \in\mathcal{M}$.

M) - alapmátrix: $\Phi := [\varphi_1,\dots,\varphi_n] : I\to\mathbb{R}^{n\times n}$; $\mathcal{M}_h=\{\Phi\cdot c : c\in\mathbb{R}^n\}$

- $\psi=\Phi\cdot g \Rightarrow \psi' = \Phi' g+\Phi g' = A\Phi g+\Phi g' = A\Phi g + b \iff \Phi g' = b$

Á) $\varphi_k(x)=e^{\lambda_k x}\cdot t_k$ alaprendszert alkotnak $(x\in I,\ k=1,\dots,n)$ ahol λ_k sajátértékek, t_k sajátvektorai A-nak. $(At_k=\lambda_k t_k)$

Magasabbrendű lineáris differenciálegyenlet:

Legyen $0<n\in\mathbb{N}$, $I\subset\mathbb{R}$ nyílt int., $a_0,\dots,a_{n-1}, c: I\to\mathbb{R}$ folytonos fv

$\Big|\, \varphi: I\to\mathbb{R}\ ? \,\Big|\, D_\varphi \text{ nyílt int.} \,\Big|\, \varphi\in D^n \,\Big|\, \forall x\in D_\varphi : \varphi^{(n)}(x)+\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\varphi^{(k)}(x) = c(x) \,\Big|$

$\Big|\, \tau\in I,\ \xi_0,\dots,\xi_{n-1}\in\mathbb{R},\ \tau\in D_\varphi,\ \varphi^{(k)}(\tau)=\xi_k\ (k=0,\dots,n-1) \,\Big|$

$\mathcal{M}_h := \{\varphi: I\to\mathbb{R} : \varphi\in D^n \text{ és } \varphi^{(n)}+\sum_{k=0}^{n-1} a_k\varphi^{(k)} = 0\}$

$\mathcal{M} := \{\varphi: I\to\mathbb{R} : \varphi\in D^n \text{ és } \varphi^{(n)}+\sum_{k=0}^{n-1} a_k\varphi^{(k)} = c\}$

T) - $\mathcal{M}_h$ n-dimenziós lineáris tér

- $\forall\psi\in\mathcal{M}: \mathcal{M}=\psi+\mathcal{M}_h$
- Legyen $\varphi_1,\dots,\varphi_n\in\mathcal{M}_h$ bázis, ekkor $\exists\, g_1,\dots,g_n: I\to\mathbb{R}$ diffható: $\psi=\sum_{j=1}^{n} g_j\varphi_j\in\mathcal{M}$.