Záróvizsga tételsor

14. Haladó algoritmusok

Dobreff András

Haladó algoritmusok

Gráfalgoritmusok: gráfok ábrázolás, szélességi bejárás, minimális költségű utak keresése, minimális költségű feszítőfa keresése, mélységi bejárás, DAG topologikus rendezése. Adattömörítések (Huffman- és LZW-algoritmus). Mintaillesztés módszerei.

1 Gráfalgoritmusok

1.1 Gráf ábrázolás

Láncolt listás ábrázolás

A gráf csúcsait helyezzük el egy tömbben (vagy láncolt listában). Minden elemhez rendeljünk hozzá egy láncolt listát, melyben az adott csúcs szomszédjait (az esetleges élsúlyokkal) soroljuk fel.

Mátrixos ábrázolás

Legyen a csúcsok elemszáma n. Ekkor egy $A^{n \times n}$ mátrixban jelöljük, hogy mely csúcsok vannak összekötve. Ekkor mind a sorokban, mind az oszlopokban a csúcsok szerepelnek, és az a_{ij} cellában a i csúcsból j csúcsba vezető él súlya szerepel, ha nincs él a két csúcs között, akkor $-\infty$ (súlyozatlan esetben 1 és 0)

Amennyiben a gráf irányítatlan nyilván $a_{ij} = a_{ji}$

1.2 Szélességi bejárás

G gráf (irányított/irányítatlan) s startcsúcsából a távolság sorrendjében érjük el a csúcsokat. A legrövidebb utak feszítőfáját adja meg, így csak a távolság számít, a súly nem.

A nyilvántartott csúcsokat egy sor adatszerkezetben tároljuk, az aktuális csúcs gyerekeit a sor-ba tesszük. A következő csúcs pedig a sor legelső eleme lesz.

A csúcsok távolságát egy d, szüleiket egy π tömbbe írjuk, és ∞ illetve 0 értékekkel inicializáljuk.

Az algoritmus:

1. Az s startcsúcsot betesszük a sorba
2. A következő lépéseket addig ismételjük, míg a sor üres nem lesz
3. Kivesszük a sor legelső (u) elemét
4. Azokat a gyerekcsúcsokat, melyeknek a távolsága nem ∞ figyelmen kívül hagyjuk (ezeken már jártunk)
5. A többi gyerekre (v): beállítjuk a szülőjét ($\pi[v] = u$), és a távolságát ($d[v] = d[u] + 1$). Majd berakjuk a sorba.

1.3 Minimális költségű utak keresése

Dijkstra algoritmus

Egy G irányított, pozitív élsúlyokkal rendelkező gráfban keres s startcsúcsból minimális költségű utakat minden csúcshoz.

Az algoritmus a szélességi bejárás módosított változata. Mivel itt egy hosszabb útnak lehet kisebb a költsége, mint egy rövidebbnek, egy már megtalált csúcsot nem szabad figyelmen kívül hagyni. Ezért minden csúcs rendelkezik három állapottal (nem elért, elért, kész). A d és π tömböket a szélességi bejáráshoz hasonlóan kezeljük.

A még nem kész csúcsokat egy prioritásos sorba helyezzük, vagy minden esetben minimumkeresést alkalmazunk.

Az algoritmus:

1. Az s startcsúcs súlyát 0-ra állítjuk eltároljuk
2. A következő lépéseket addig ismételjük, míg a konténerünk üres nem lesz
3. Kivesszük a sor legjobb (u) elemét, és "kész"-re állítjuk
4. Ha egy gyerekcsúcs (v) nem kész, és a jelenleg hozzávezető út súlya kisebb, mint az eddigi, akkor: a szülőjét u-ra állítjuk ($\pi[v] = u$), és a súlyát frissítjük ($d[v] = d[u] + d(u, v)$).
5. A többi csúcsot kihagyjuk.

Bellman-Ford algoritmus

Egy G élsúlyozott (akár negatív) irányított gráf s startcsúcsából keres minden élhez minimális költségű utakat, illetve felismeri, ha negatív költségű kör van a gráfban. A d és π tömböket az előzőekhez hasonlóan kezeljük.

Az algoritmus:

1. A startcsúcs súlyát állítsuk be 0-ra.
2. $n-1$ iterációban menjünk végig az összes csúcson, és minden csúcsot (u) vessünk össze minden csúccsal (v). Ha olcsóbb utat találtunk akkor v-be felülírjuk a súlyát ($d[v] = d[u] + d(u, v)$), és a szülőjét ($\pi[v] = u$).
3. Ha az n-edik iterációban is történt módosítás, negatív kör van a gráfban

1.4 Minimális költség feszítőfa keresése

A Prim algoritmus egy irányítatlan élsúlyozott (akár negatív) gráf s startcsúcsából keres minimális költségű feszítőfát. A d és π tömböket az előzőekhez hasonlóan kezeljük. Az algoritmus egy prioritásos sorba helyezi a csúcsokat.

Az algoritmus:

1. A startcsúcs súlyát állítsuk be 0-ra.
2. A csúcsokat behelyezzük a prioritásos sorba.
3. A következő lépéseket addig végezzük, míg a prioritásos sor ki nem ürül.
4. Kiveszünk egy csúcsot (u) a sorból.
5. Minden gyerekére (v), amely még a sorban és a nyilvántartott v-be vezető él súlya nagyobb, mint a most megtalált: A v szülőjét u-ra változtatjuk, a nyilvántartott súlyt felülírjuk $d[v] = d(u, v)$. Majd felülírjuk a v állapotát a prioritásos sorban.
6. Azokkal a gyerekekkel, melyek nincsenek a sorban, vagy a súlyukon nem tudunk javítani, nem változtatunk.

1.5 Mélységi bejárás

G irányított (nem feltétlenül összefüggő) gráf mélységi bejárásával egy mélységi fát (erdőt) kapunk. Az algoritmus a következő:

- Az élsúlyok nem játszanak szerepet
- Nincs startcsúcs, a gráf minden csúcsára elindítjuk az algoritmust. (Természetesen ekkor, ha már olyan csúcsot választunk, amin már voltunk, az algoritmus nem indul el.)
- A csúcsokat mohón választjuk, azaz minden csúcs gyerekei közül az elsőt választva haladunk előre, amíg csak lehet. (Olyan csúcsot találunk, amelynek nincs gyereke, vagy minden gyerekén jártunk már.)
- Ha már nem lehet előre haladni visszalépünk.

- Minden csúcshoz hozzárendelünk két értéket. Az egyik a mélységi sorszám, mely azt jelöli, hogy hanyadiknak értük el. A másik a befejezési szám, mely azt jelzi, hogy hanyadiknak léptünk vissza belőle.

A gráf éleit a mélységi bejárás közben osztályozhatjuk. (Inicializáláskor minden értéket 0-ra állítottunk)

- Faél: A következő csúcs mélységi száma 0
- Visszaél: A következő csúcs mélységi száma nagyobb, mint 0, és befejezési száma 0 (Tehát az aktuális út egy előző csúcsára kanyarodunk vissza)
- Keresztél: A következő csúcs mélységi száma nagyobb, mint 0, és befejezési száma is nagyobb, mint 0, továbbá az aktuális csúcs mélységi száma nagyobb, mint a következő csúcs mélységi száma. (Ekkor egy az aktuális csúcsot megelőző csúcsból induló, már megtalált útba mutató éllel van dolgunk)
- Előreél: A következő csúcs mélységi száma nagyobb, mint 0, és befejezési száma is nagyobb, mint 0, továbbá az aktuális csúcs mélységi száma kisebb, mint a következő csúcs mélységi száma. (Ekkor egy az aktuális csúcsból induló, már megtalált útba mutató éllel van dolgunk)

1.6 DAG Topologikus rendezése

Alapfogalmak

- Topologikus rendezés:
  Egy $G(V, E)$ gráf topologikus rendezése a csúcsok olyan sorrendje, melyben $\forall(u \to v) \in E$ élre u előbb van a sorrendben , mint v
- DAG - Directed Acyclic Graph:
  Irányított körmentes gráf.
  Legtöbbször munkafolyamatok irányítására illetve függőségek analizálására használják.
  Tulajdonságok:
  - Ha G gráfra a mélységi bejárás visszaélt talál (Azaz kört talált) $\Longrightarrow$ G nem DAG
  - Ha G nem DAG (van benne kör) $\Longrightarrow$ Bármely mélységi bejárás talál visszaélt
  - Ha G-nek van topologikus rendezések $\Longrightarrow$ G DAG
  - Minden DAG topologikusan rendezhető.

DAG topologikus rendezése

Egy G gráf mélységi bejárása során tegyük verembe azokat a csúcsokat, melyekből visszaléptünk. Az algoritmus után a verem tartalmát kiírva megkapjuk a gráf egy topologikus rendezését.

2 Adattömörítések

2.1 Huffman-algoritmus

A Huffman-algoritmussal való tömörítés lényege, hogy a gyakrabban előforduló elemeket (karaktereket) rövidebb, míg a ritkábban előfordulókar hosszabb kódszavakkal kódoljuk.

Ehhez tisztában kell lennünk az egyes karakterek gyakoriságával (vagy relatív gyakoriságával). Ezek alapján egy ún. Huffman-fát építünk, melyben az éleket a kód betűivel címkézzük, a fa levelein a kódolandó betűk helyezkednek el, a gyökérből a levelekig vezető út címkéi alapján rajuk össze a kódszavakat.

Az algoritmus (spec. bináris Huffman fára):

1. A kódolandó szimbólumokat gyakoriságaik alapján sorba rendezzük.
2. A következő redukciós lépéseket addig hajtjuk végre, míg egy csoportunk marad.
3. Kiválasztjuk az utolsó két elemet (legritkább), összevonjuk őket egy új csoportba, és ennek a csoportnak a gyakorisága a gyakoriságok összege lesz.
4. A csoportot visszahelyezzük a rendezett sorba (gyakoriság alapján rendezve).

5. A csoportból új csúcsot képezünk, mely csúcs az őt alkotó két elem szülője lesz.

Példa:
Legyen a következő 5 betű, mely a megadott gyakorisággal fordul elő:

A	B	C	D	E
5	4	3	2	1

Ekkor a redukciós lépések a következők:

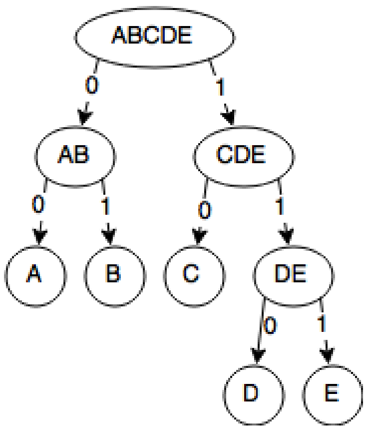
A	B	C	D, E
5	4	3	3

C, D, E	A	B
6	5	4

A , B	C, D, E
9	6

A , B , C, D, E
15

A huffman-fa a XY. ábrán látható.



ábra 1: Huffman-fa példa

Tehát a kódszavak:

A	B	C	D	E
00	01	10	110	111

2.2 LZW-algoritmus

Az LZW (Lempel-Ziv-Welch) tömörítésnek a lényege, hogy egy szótárat bővítünk folyamatosan, és az egyes kódolandó szavakhoz szótárindexeket rendelünk.

Kódolás

A kódolás algoritmusa a következő lépésekből áll:

1. A szótárt inicializáljuk az összes 1 hosszú szóval
2. Kikeressük a szótárból a leghosszabb, jelenlegi inputtal összeillő W sztringet
3. W szótárindexét kiadjuk, és W-t eltávolítjuk az inputról
4. A W szó és az input következő szimbólumának konkatenációját felvesszük a szótárba
5. A 2. lépéstől ismételjük

Dekódolás

A dekódolás során is építenünk kell a szótárat. Ezt már azonban csak a dekódolt szöveg(rész) segítségével tudjuk megtenni, mivel egy megkapott kód dekódolt szava és az utána lévő szó első karakteréből áll össze a szótár következő eleme.

Tehát a dekódolás lépései:

1. Kikeressük a kapott kódhoz tartozó szót a szótárból (u), az output-ra rakjuk
2. Kikeressük a következő szót (v) a szótárból, az első szimbólumát u-hoz konkatenálva a szótárba rakjuk a következő indexszel.
3. Amennyiben már nincs következő szó, dekódolunk, de nem írunk a szótárba.

Megtörténhet az az eset, hogy mégis kapunk olyan kódszót, mely még nincs benne a szótárban. Ez akkor fordulhat elő, ha a kódolásnál az aktuálisan szótárba írt szó következik.

Példa:

Szöveg: AAA
Szótár: A - 1

Ekkor a kódolásnál vesszük az első karaktert, a szótárbeli indexe 1, ezt kiküldjük az outputra. A következő karakter A, így AA-t beírjuk a szótárba 2-es indexszel. Az első karaktert töröljük az inputról. Addig olvasunk, míg szótárbeli egyezést találunk, így AA-t olvassuk (amit pont az előbb raktunk be), ennek indexe 2, tehát ezt küldjük az outputra. AA-t töröljük az inputról, és ezzel végeztünk is. Az output: 1,2

Dekódoljuk az 1,2 inputot! Jelenleg a szótárban csak A van 1-es indexszel. Vegyük az input első karakterét, az 1-et, ennek szótárbeli megfelelője A. Ezt tegyük az outputra. A következő index a 2, de ilyen bejegyzés még nem szerepel a szótárban.

Ebben az esetben a dekódolásnál, egy trükköt vetünk be. A szótárba írás pillanatában még nem ismert a beírandó szó utolsó karaktere (A példában A-t találtuk, de nem volt 2-es bejegyzés). Ekkor ?-et írunk a szótárba írandó szó utolsó karakterének helyére. (Tehát A? - 2 kerül a szótárba). De mostmár tudni lehet az új bejegyzés első betűjét (A? - 2 az új bejegyzés, ennek első betűje A). Cseréljük le a ?-et erre a betűre. (Tehát AA - 2 lesz a szótárban).

3 Mintaillesztés

3.1 Knuth-Morris-Pratt algoritmus

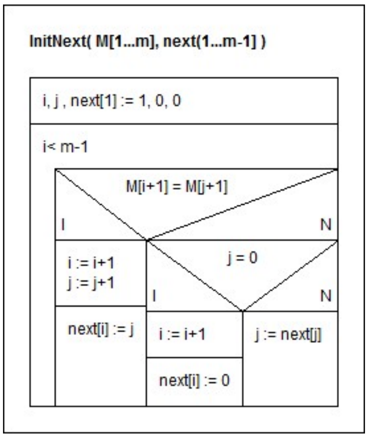
A Knuth-Morris-Pratt eljárásnak a Brute-Force (hasonlítsuk össze, toljunk egyet, stb..) módszerrel szemben az az előnye, hogy egyes esetekben, ha a mintában vannak ismétlődő elemek, akkor egy tolásnál akár több karakternyit is ugorhatunk.

...	A	B	A	B	A	B	A	C	...
	A	B	A	B	A	C			
			A	B	A	B	A	C	

ábra 2: KMP algoritmus több karakter tolás estén

Az ugrás megállapítását a következőképp tesszük: Az eddig megvizsgált egyező mintarész elején (prefix) és végén (suffix) olyan kartersorozatot keresünk, melyek megegyeznek. Ha találunk ilyet, akkor a mintát annyival tolhatjuk, hogy az elején lévő része ráilleszkedjen a végén levőre.

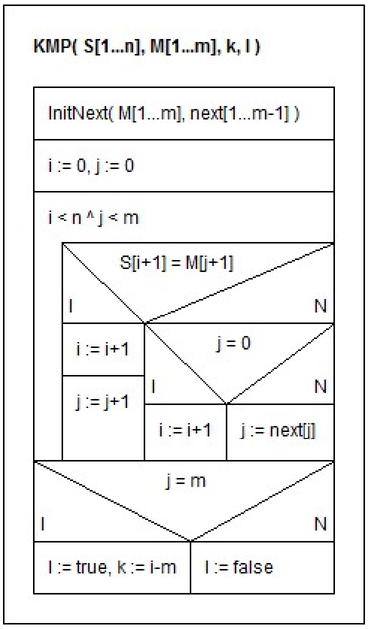
Azt, hogy ez egyes esetekben mekkorát tolhatunk nem kell minden elromlás alkalmával vizsgálni. Ha a mintára önmagával lefuttatjuk az algoritmus egy módosított változatát (3. ábra), kitölthetünk egy tömböt, mely alapján a tolásokat végezni fogjuk.



ábra 3: KMP tolásokat szabályzó tömb kitöltése

Az algoritmus (ld 4. ábra):

- Két indexet i és j futtatunk a szövegen illetve a mintán.
- Ha az $i+1$-edik és $j+1$-edik karakterek megegyeznek, akkor léptetjük mind a kettőt.
- Ha nem egyeznek meg, akkor:
  - Ha a minta első elemét vizsgáltuk, akkor egyet tolunk a mintán, magyarul a minta indexe marad az első betűn, és a szövegben lévő indexet növeljük eggyel ($i = i + 1$)
  - Ha nem a minta első elemét vizsgáltuk, akkor annyit tolunk, amennyit szabad. Ez azt jelenti, hogy csak a mintán lévő indexet helyezzük egy kisebb helyre ($j = next[j]$)
- Addig megyünk, míg vagy a minta, vagy a szöveg végére nem érünk. Ha a minta végére értünk, akkor megtaláltuk a mintát a szövegben, ha a szöveg végére értünk, akkor pedig nem.



ábra 4: KMP algoritmus

3.2 Boyer-Moore — Quick search algoritmus

Míg a KMP algoritmus az elromlás helye előtti rész alapján döntött a tolásról, addig a QS a minta utáni karakter alapján. Tehát elromlás esetén:

- Ha a minta utáni karakter benne van a mintában, akkor jobbról az első előfordulására illesztjük. (5. ábra)

...	A	B	A	A	C	B	C	D	...
	A	A	C	B	C	D			
			A	A	C	B	C	D	

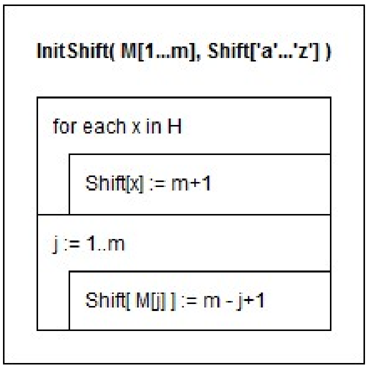
ábra 5: QS - eltolás ha a minta utáni karakter benne van a mintában

- Ha a minta utáni karakter nincs benne a mintában, akkor a mintát ezen karakter után illesztjük. (6. ábra)

...	A	B	A	A	C	B	X	D	...				
	A	A	C	B	C	D							
								A	A	C	B	C	D

ábra 6: QS - eltolás ha a minta utáni karakter nincs benne a mintában

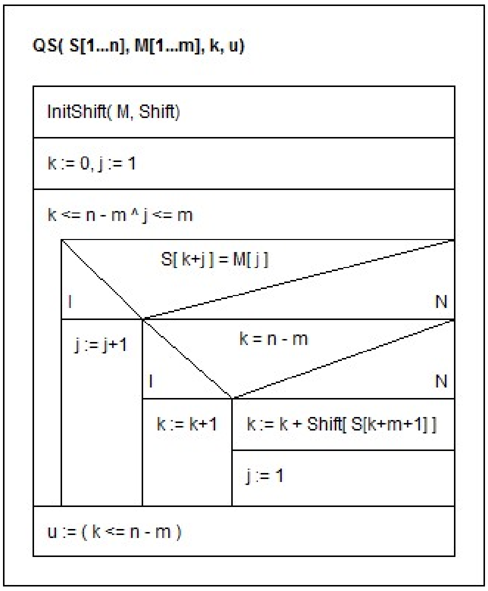
Az eltolás kiszámítását megint elő lehet segíteni egy tömbbel, most azonban, mivel nem a minta az érdekes, és nem tudjuk pontosan mely karakterek szerepelnek a szövegben, így a tömbbe az egész abc-t fel kell vennünk (7. ábra)



ábra 7: QS - Az eltolást elősegítő tömb ($Shift['a'...'z']$) konstruálása

Az algoritmus (ld. 8. ábra):

- Két indexet k és j futtatunk a szövegen illetve a mintán.
- Ha a szöveg $k+j$-edik eleme megegyezik a minta j-edik karakterével, akkor léptetjük j-t (mivel a szövegben $k+j$-edik elemet nézzük, így elég j-t növelni).
- Ha nem egyeznek meg, akkor:
  - Ha a minta már a szöveg végén van ($k = n - m$), akkor csak növeljük k-t eggyel, ami hamissá teszi a ciklus feltételt.
  - Ha még nem vagyunk a szöveg végén k-t toljuk annyival, amennyivel lehet (ezt az előre beállított $Shift$ tömb határozza meg). És a j-t visszaállítjuk 1-re.
- Addig megyünk, míg vagy a minta végére érünk j-vel, vagy a mintát továbbtoltuk a szöveg végénél. Előbbi esetben egyezést találtunk, míg az utóbbiban nem.



ábra 8: QS

3.3 Rabin-Karp algoritmus

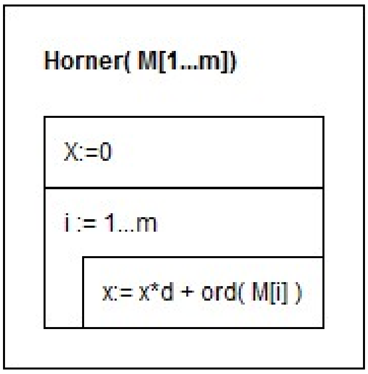
A Rabin-Karp algoritmus lényege, hogy minden betűhöz az ábécéből egy számjegyet rendelünk, és a keresést számok összehasonlításával végezzük. Világos, hogy ehhez egy ábécé méretnek megfelelő számrendszerre lesz szükségünk. A szövegből mindig a minta hosszával egyező részeket szelünk ki, és ezeket hasonlítjuk össze.

Példa:
Minta: BBAC → 1102
Szöveg: DACABBAC → 30201102, amiből a következő számokat állítjuk elő: 3020, 0201, 2011, 0110, 1102

A fent látható szeletek lesznek az s_i-k.

Az algoritmus működéséhez azonban számos apró ötletet alkalmazunk:

1. A minta számokká alakítását Horner-módszer segítségével végezzük.



ábra 9: RK - Horner-módszer

   Az $ord()$ függvény az egyes betűknek megfelelő számot adja vissza. A d a számrendszer alapszáma.

2. A szöveg mintával megegyező hosszú szeleteinek (s_i) előállítása:
   s_0-t a Horner-módszerrel ki tudjuk számolni. Ezek után s_{i+1} a következőképp számolandó:

$$s_{i+1} = (s_i - ord(S[i]) \cdot d^{m-1}) \cdot d + ord(S[i+1])$$

Magyarázat: s_i elejéről levágjuk az első számjegyet ($s_i - ord(S[i]) \cdot d^{m-1}$), majd a maradékot eltoljuk egy helyiértékkel (szorzás d-vel), végül az utolsó helyiértékre beírjuk a következő betűnek megfelelő számjegyet ($+ord(S[i+1])$)

Példa:

Az előző példa szövegével és mintájával ($d = 10$ elemű ábécé és $m = 4$ hosszú minta):
$s_0 = 3020$, ekkor: $s_{0+1} = s_1 = (3020 - ord(D) \cdot 10^3) \cdot 10 + ord(B) = (3020 - 3000) \cdot 10 + 1 = 0201$

3. Felmerülhet a kérdés, hogy az ilyen magas alapszámú számrendszerek nem okoznak-e gondot az ábrázolásnál? A kérdés jogos. Vegyük a következő életszerű példát:

   4 bájton ábrázoljuk a számainkat (2^{32}). Az abc legyen 32 elemű ($d = 32$), a minta 8 hosszú ($m = 8$). Ekkor a d^{m-1} kiszámítása: $32^7 = (2^5)^7 = 2^{35}$, ami már nem ábrázolható 4 bájton.

   Ennek kiküszöbölésére vezessünk be egy nagy p prímet, melyre $d \cdot p$ még ábrázolható. És a műveleteket számoljuk $\mod p$. Ekkor természetesen a kongruencia miatt lesz olyan eset, amikor az algoritmus egyezést mutat, mikor valójában nincs. Ez nem okoz gondot, mivel ilyen esetben karakterenkénti egyezést vizsgálva ezt a problémát kezelni tudjuk. (Fordított eset nem fordul elő tehát nem lesz olyan eset, mikor karakterenkénti egyezés van, de numerikus nincs). [Ha p kellően nagy, a jelenség nagyon ritkán fordul elő.]

4. A $\mod p$ számítás egy másik problémát is felvet. Ugyanis a kivonás alkalmával negatív számokat is kaphatunk.

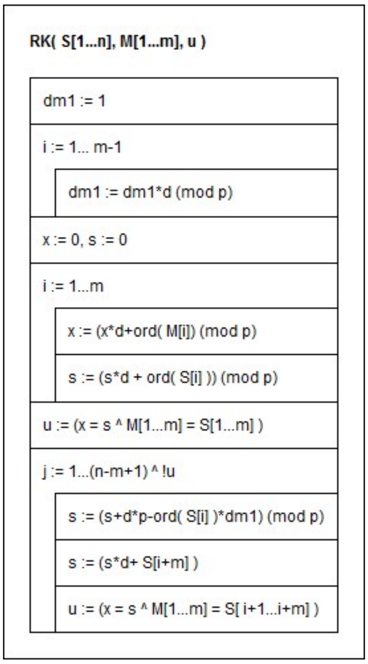
   Például: Legyen $p = 7$, ekkor, ha $ord(S[i]) = 9$, akkor előző számítás után $s_i = 2...$, de ebből $ord(S[i]) \cdot d^{m-1} = 9 \cdot 10^3 = 9000$-et vonunk ki negatív számot kapunk.

   Megoldásként s_{i+1}-et két lépésben számoljuk:

$$s := (s_i + d \cdot p - ord(S[i]) \cdot d^{m-1}) \mod p$$
$$s_{i+1} := (s \cdot d + ord(S[i+1])) \mod p$$

A fentiek alapján az algoritmus a következő (ld. 10. ábra)

1. Kiszámoljuk d^{m-1}-et ($dm1$)
2. Egy iterációban meghatározzuk Horner-módszerrel a minta számait (x) és s_0-t
3. Ellenőrizzük, hogy egyeznek-e
4. Addig számolgatjuk s_i értékét míg a minta nem egyezik s_i-vel, vagy a minta a szöveg végére nem ért.



ábra 10: RK