Záróvizsga tételsor
4. Számelmélet, gráfok, kódoláselmélet

Dobreff András

Számelmélet, gráfok, kódoláselmélet
Relációk, rendezések. Függvények és műveletek. Számfogalom, komplex számok. Leszámlálások véges halmazokon. Számelméleti alapfogalmak, lineáris kongruencia-egyenletek. Általános és síkgráfok, fák, Euler- és Hamilton-gráfok, gráfok adatszerkezetei. Polinomok és műveleteik, maradékos osztás, Horner-séma. Betűnkénti kódolás, Shannon- és Huffman-kód. Hibajavító kódok, kódtávolság. Lineáris kódok.

1 Számelmélet

1.1 Relációk, rendezések

Alapfogalmak

- Rendezett pár
  (x, y) rendezett pár, ha $(x, y) = (u, v) \iff x = u \ \wedge \ y = v$. Ezt a tulajdonságot halmazokkal definiáljuk:
  $$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$
- Descartes-szorzat
  X, Y halmazok Descartes-szorzata vagy direkt szorzata:
  $$X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$
- Binér reláció
  Egy halmazt binér relációnak nevezünk, ha minden eleme rendezett pár. Ha R binér reláció és $(x, y) \in R$, akkor gyakran írjuk: xRy
- Reláció
  Ha X, Y halmazokra $R \subset X \times Y$, akkor R reláció X és Y között.
- Értelmezési tartomány
  Az R binér reláció értelmezési tartománya:
  $$\mathrm{dmn}(R) := \{x \mid \exists y : (x, y) \in R\}$$
- Érték készlet
  Az R binér reláció érték készlete:
  $$\mathrm{rng}(R) := \{y \mid \exists x : (x, y) \in R\}$$
- Inverz
  Egy R binér reláció inverze:
  $$R^{-1} := \{(a, b) : (b, a) \in R\}$$
- Halmaz képe
  Legyen R binér reláció, és A halmaz. Az A halmaz képe:
  $$R(A) := \{y \mid \exists x \in A : (x, y) \in R\}$$
- Kompozíció
  R és S binér relációk kompozíciója:
  $$R \circ S := \{(x, y) \mid \exists z : (x, z) \in S \ \wedge \ (z, y) \in R \ \}$$

Tulajdonságok

Az R egy X-beli binér reláció (azaz $R \subset X \times X$)

1. tranzitív

$$\forall x, y, z : (x, y) \in R \ \wedge \ (y, z) \in R \Longrightarrow (x, z) \in R$$

2. szimmetrikus

$$\forall x, y : (x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \in R$$

3. antiszimmetrikus

$$\forall x, y : (x, y) \in R \ \wedge \ (y, x) \in R \Longrightarrow x = y$$

4. szigorúan antiszimmetrikus

$$\forall x, y : (x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \notin R$$

5. reflexív

$$\forall x \in X : (x, x) \in R$$

6. irreflexív

$$\forall x \in X : (x, x) \notin R$$

7. trichotóm
   Ha minden $x, y \in X$ esetén az alábbiak közül pontosan egy teljesül
   a) $x = y$
   b) $(x, y) \in R$
   c) $(y, x) \in R$
8. dichotóm

$$\forall x, y \in X : (x, y) \in R \ \vee \ (y, x) \in R$$

   Más néven az elemek összehasonlíthatóak.

Rendezések

- Ekvivalenciareláció, osztályozás
  X halmaz, R X-beli binér reláció ekvivalenciareláció, ha
  - Reflexív
  - Tranzitív
  - Szimmetrikus

  X részhalmazainak egy $\mathcal{O}$ rendszerét osztályozásnak hívjuk, ha $\mathcal{O}$ páronként diszjunkt nemüres halmazokból álló halmazrendszer, melyre $\cup\mathcal{O} = X$

  Tétel:
  Egy ekvivalenciareláció meghatároz egy osztályozást. Fordítva: $\mathcal{O}$ osztályozásra $R = \cup\{Y \times Y : Y \in \mathcal{O}\}$ ekvivalenciareláció.
- Részbenrendezés
  X halmaz, R X-beli binér reláció részbenrendezés, ha
  - Reflexív
  - Tranzitív
  - Antiszimmetrikus
- Teljes rendezés
  X halmaz, R X-beli binér reláció (teljes) rendezés, ha
  - Reflexív

– Tranzitív
– Antiszimmetrikus
– Dichotóm

Magyarul ha egy részbenrendezés dichotóm (tehát minden eleme összehasonlítható), akkor (teljes) rendezés.

- Szigorú és gyenge reláció, rendezés
X halmaz, R,S relációk X-beliek. Ha

$$xRy \ \wedge \ x \neq y \Rightarrow xSy$$

akkor S-et az R szigorításának nevezzük.
Megfordítva, ha

$$xRy \ \vee \ x = y \Rightarrow xTy$$

akkor T az R-hez megfelelő gyenge reláció.

Megjegyzés: Tulajdonképpen a reflexívitás elvételéről és hozzáadásáról van szó. Egy részbenrendezés esetén a megfelelő szigorú reláció (szigorú részbenrendezés) tehát irreflexív, következésképpen szigorúan antiszimmetrikus is. Megfordítva: Egy X-beli szigorú részbenrendezés (tran., irrefl., szig. ant.) megfelelő gyenge relációja részbenrendezés.

Korlátok

- Legkisebb, legnagyobb, minimális, maximális elem
X halmazbeli részbenrendezés ($\preccurlyeq$) legkisebb (legelső) elemén egy olyan $x \in X$ elemet értünk, melyre: $\forall y \in X : x \preccurlyeq y$. (Ilyen nem biztos, hogy létezik, de ha igen, akkor egyértelmű).
Hasonlóan a legnagyobb (utolsó) elem olyan $x \in X$, hogy $\forall y \in X : y \preccurlyeq x$.

x-et minimálisnak nevezzük, ha nincs nála kisebb elem, maximálisnak, ha nincs nála nagyobb elem. (Szemben a legkisebb/legnagyobb elemekkel, minimális/maximális elemből több is lehet. Ha viszont X rendezett, akkor legkisebb=minimális, legnagyobb=maximális.)

- Alsó, felső korlát
X részbenrendezett halmaz, $Y \subset X$. Az $x \in X$ elem az Y alsó korlátja $\forall y \in Y : x \preccurlyeq y$. (felső korlátja: $\forall y \in Y : y \preccurlyeq x$). Látható, hogy x nem feltétlenül eleme Y-nak, sőt az is lehet, hogy Y-nak nincs alsó/felső korlátja, vagy akár több is van. Ha azonban $x \in Y$, akkor egyértelmű és ez Y legkisebb eleme.

- Infimum, szuprémum
Ha az alsó korlátok között van legnagyobb elem, azt Y alsó határának, infimumának nevezzük. (Jele: inf$Y$)
Ha a felső korlátok között van legnagyobb elem, azt Y felső határának, szuprémumának nevezzük. (Jele: sup$Y$)

- Alsó, felső határ tulajdonság
X részbenrendezett halmaz. Ha $\forall \emptyset \neq Y \subset X : Y$ felülről korlátos és van szuprémuma, akkor felső határ tulajdonságú. Illetve ha $\forall \emptyset \neq Y \subset X : Y$ alulról korlátos és van infimuma, akkor alsó határ tulajdonságú.

1.2 Függvények és műveletek

1.2.1 Függvények

Definíció

Egy f reláció függvény, ha

$$(x, y) \in f \ \wedge (x, y') \ \in f \Longrightarrow y = y'$$

Más szóval minden x-hez legfeljebb egy olyan y létezik, hogy $(x, y) \in f$

Így minden $x \in \mathrm{dmn}(f)$-re az $f(x) = \{y\}$, melyet $f(x) = y$ vagy $f : x \mapsto y$ vagy $f_x = y$ is szoktunk jelölni.

Értelmezési tartomány, értékkészlet

Az $f : X \to Y$ jelölést használjuk, ha $\mathrm{dmn}(f) = X$.
Az $f \in X \to Y$ jelölést használjuk, ha $\mathrm{dmn}(f) \subset X$ (amikor $\mathrm{dmn}(f) \subsetneq X$ is előfordulhat).
Mindkét esetben $\mathrm{rng}(f) \subset Y$.

Injektív

f függvény kölcsönösen egyértelmű/injektív, ha

$$f(x) = y \ \wedge \ f(x') = y \implies x = x'$$

Ez azzal ekvivalens, hogy f^{-1} reláció is függvény.

Szürjektív

Az f függvény szürjektív, ha

$$\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$$

Azaz $\mathrm{rng}(f) = Y$. Magyarul az f függvény az egész Y-ra képez.

Bijektív

Ha az f függvény injektív és szürjektív, akkor bijektív.

Indexelt család

Az x függvény i helyen felvett értékét x_i-vel is szoktuk jelölni. Ilyenkor gyakran $\mathrm{dmn}(f) = I$ értelmezési tartományt indexhalmaznak, elemeit indexeknek, $\mathrm{rng}(f)$-et indexelt halmaznak, és magát az x függvényt indexelt családnak szoktuk nevezni.

1.2.2 Műveletek

Definíciók

- Binér művelet
  X halmazon egy $f : X \times X \to X$ függvény binér művelet.
- Unér művelet
  X halmazon egy $f : X \to X$ függvény unér művelet.
- Nullér művelet
  X halmaz, $f : \{\emptyset\} \to X$ nullér művelet. (Gyakorlatilag elemkiválasztás)

Tulajdonságok

- Legyen $\spadesuit, ©$ binér műveletek X-en.
  1. $\spadesuit$ asszociatív, ha
     $$\forall x, y, z \in X : \quad (x \spadesuit y) \spadesuit z = x \spadesuit (y \spadesuit z)$$
  2. $\spadesuit$ kommutatív, ha
     $$\forall x, y \in X : \quad x \spadesuit y = y \spadesuit x$$
  3. $\spadesuit$ disztributív a ©-ra, ha $\forall x, y, z \in X$:
     $$x \spadesuit (y \copyright z) = (x \spadesuit y) \copyright (x \spadesuit z) \quad \text{- baloldali}$$
     $$(y \copyright z) \spadesuit x = (y \spadesuit x) \copyright (z \spadesuit x) \quad \text{- jobboldali}$$
- Legyen $\heartsuit$ binér művelet X-en és $\S$ binér művelet Y-on $f : X \to Y$ művelettartó ha:
  $$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1 \heartsuit x_2) = f(x_1) \ \S \ f(x_2)$$

1.3 Számfogalom, komplex számok

1.3.1 Számfogalom

Algebrai Struktúrák

1. Grupoid
   G halmaz egy $\star$ művelettel, azaz a $(G, \star)$ párt grupoidnak nevezzük.
2. Félcsoport
   Ha egy grupoidban a $\star$ művelet asszociatív, akkor a grupoid félcsoport.
3. Monoid
   Semleges elemes félcsoportot monoidnak nevezzük.
   Megyjegyzés: $a \in G$ semeleges elem, ha $\forall g \in G : a \star g = g \star a = g$
4. Csoport
   Ha egy monoidban minden elemnek van inverze, akkor csoportról beszélünk.
   Megyjegyzés: $g, g^{-1} \in G$ és $\xi \in G$ semleges elem, akkor a g^{-1} a g inverze, ha $g \star g^{-1} = \xi$ és $g^{-1} \star g = \xi$
5. Ábel-csoport
   Ha egy csoportban a művelet kommutatív, akkor Abel-csoport.
6. Gyűrű
   $(R, +, \cdot)$ gyűrű, ha az összeadással Abel-csoport, a szorzással félcsoport és teljesül mindkét oldali disztributivitás.
   Ha a szorzás kommutatív, akkor kommutatív gyűrű.
   Ha a szorzásnak van egységeleme, akkor egységelemes gyűrű.
7. Integritási tartomány
   Nullosztó mentes kommutatív gyűrű.
   Nullosztó: x, y nullától különböző elemek, de $x \cdot y = 0$
8. Rendezett integritási tartomány
   R integritási tartomány rendezett integritási tartomány, ha rendezett halmaz, továbbá az összeadás és szorzás monoton.
   Összeadás monoton: $x, y, z \in R$ és $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
   Szorzás monoton: $x, y \in R$ és $x, y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$
9. Test
   Egy R gyűrűt, ha $R \setminus \{0\}$ szorzással Abel-csoport, akkor test.
10. Rendezett test
    Ha egy test rendezett integritási tartomány, akkor rendezett test.

Természetes számok

- Peano-axiómák
  Legyen $\mathbb{N}$ egy halmaz és a $^+$ egy $\mathbb{N}$-en értelmezett függvény. Az alábbi feltételeket Peano-axiómáknak nevezzük:
  1. $0 \in \mathbb{N}$ - 0 egy nullér művelet $\mathbb{N}$-en
  2. ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $n^+ \in N$ - $^+$ egy unér művelet $\mathbb{N}$-en
  3. ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $n^+ \neq 0$ - 0 nincs a $^+$ értékkészletében
  4. ha $n, m \in \mathbb{N}$, és $m^+ = n^+$, akkor $n = m$ - $^+$ injektív
  5. ha $S \subset \mathbb{N}, 0 \in S$, továbbá $n \in S : n^+ \in S$, akkor $S = \mathbb{N}$ - a matematikai indukció elve
- Műveletek
  - összeadás
    $k, m, n \in \mathbb{N}$, akkor:
    1. $(k + m) + n = k + (m + n)$ - *asszociativitás*
    2. $n + 0 = 0 + n = n$ - *0 a nullelem (additív semleges elem)*
    3. $n + k = k + n$ - *kommutativitás*
    4. $n + k = m + k$ vagy $k + n = k + m$, akkor $m = n$ - *egyszerűsítési szabály*

– szorzás

$k, m, n \in \mathbb{N}$, akkor:

1. $(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n)$ - *asszociativitás*
2. $0 \cdot n = n \cdot 0 = 0$
3. $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$ - *1 az egységelem (multiplikatív semleges elem)*
4. $n \cdot k = k \cdot n$ - *kommutativitás*
5. $k \cdot (m + n) = k \cdot m + \cdot n$, illetve $(m + n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k$ - *disztributivitás*
6. $k \neq 0$ esetén: $n \cdot k = m \cdot k$, akkor $m = n$ - *egyszerűsítési szabály*

Egész számok

Természetes számok körében az összeadásra nézve csak a nullának van inverze, másként szólva, a kivonás általában nem végezhető el.

Tekintsük a $\sim \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relációt, melyre $(m, n) \sim (m', n')$, ha $m+n' = m'+n$. És vegyük az $(m, n)+(m', n') = (m + m', n + n')$ összeadást. A $\sim$ reláció ekvivalenciareláció, az ekvivalenciaosztályok halmazát jelöljük $\mathbb{Z}$-vel. $\mathbb{Z}$ elemeit egész számoknak nevezzük.

Az összeadás kompatibilis az ekvivalenciával, így az egész számok között értelmezve van, és $(\mathbb{Z}, +)$ Ábel-csoport.

Tehát $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ gyűrű.

Megjegyzés: $*$ *művelet kompatibilis a* $\asymp$ *ekvivalenciarelációval, ha teljesül:* $x \asymp x' \ \wedge \ y \asymp y' \implies x * y \asymp x' * y'$

Racionális számok

Az egész számok körében a nem nulla elemek közül csak az 1-nek és a -1-nek van multiplikatív inverze, másként szólva az osztás általában nem végezhető el.

Tekintsük a $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$-n a $\sim$ relációt, melyre $(m, n) \sim (m', n')$, ha $mn' = nm'$. És vegyük az $(m, n) + (m', n') = (mn' + nm', nn')$ összeadást és az $(m, n) \cdot (m', n') = (mm', nn')$ szorzást. A $\sim$ reláció ekvivalenciareláció, az ekvivalenciaosztályok halmazát jelöljük $\mathbb{Q}$-val. $\mathbb{Q}$ elemeit racionális számoknak nevezzük.

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ rendezett test.

Valós számok

Nincs olyan $a \in \mathbb{Q}$ szám, melynek négyzete 2. Tehát nem minden szám írható fel m/n $(m, n \in \mathbb{N}^+)$ alakban.

Archimédeszi rendezettség:
Egy F rendezett testet archimédeszien rendezett, ha $x, y \in F : \exists n \in \mathbb{N} : nx \geq y \quad (x > 0)$

A racionális számok rendezett teste archimédeszien rendezett, de nem felső határ tulajdonságú.

Egy felső határ tulajdonságú rendezett testet a valós számok testének nevezünk, és $\mathbb{R}$-rel jelöljük. $(\exists! \mathbb{R})$

1.3.2 Komplex számok

A komplex számok szükségét a harmadfokú egyenletek megoldására való Cardano-képlet szülte. Ugyanis abban az esetben, amikor az egyenletnek három különböző valós gyöke van, a képletben a gyökjel alá negatív szám kerül. Fokozatosan tisztult a "képzetes" számokkal való számolás szabályai, és a trigonometrikus függvényekkel való kapcsolat.

Definíció

A komplex számok halmaza $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. $\mathbb{C}$ az $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ összeadással és az $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', y'x + yx')$ szorzással test. A komplex számok halmaza nem rendezett test, mivel (tétel alapján) egy rendezett integritási tartományban $x \neq 0 \ \Rightarrow x^2 > 0$. (Ez azonban $(0, 1)^2 = i^2 = -1$-re nem teljesül).

[A komplex számok körében (0,0) a nullelem, $(1, 0)$ egységelem, (x, y) additív inverze $(-x, -y)$, és $(0, 0) \neq (x, y)$ pár multiplikatív inverze az $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$ pár.]

Valós számok azonosítása

Mivel $(x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0)$ és $(x, 0) \cdot (x', 0) = (xx', 0)$ így az összes $(x, 0), x \in \mathbb{R}$ komplex számot azonosíthatjuk $\mathbb{R}$-rel.

Komplex számok algebrai alakja

Mivel

$$(x, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot i = x + yi$$

így a komplex számokat $a + bi$ algebrai alakban is írhatjuk.

Ekkor az $\mathrm{Re}(z) = x$ valós számot a $z = (x, y)$ komplex szám valós részének, az $\mathrm{Im}(z) = y$ valós számot pedig a képzetes részének nevezzük.

Konjugált

$z = x + yi$ komplex szám konjugáltja: $\overline{z} = x - yi$

Tulajdonságai:

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $\overline{\overline{z}} = z$
4. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
5. $z - \overline{z} = i \cdot 2\mathrm{Im}(z)$

Abszolút érték

A $z = (x, y)$ komplex szám abszolút értéke: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Tulajdonságai:

1. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
2. $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$
3. $|z| = \overline{|z|}$
4. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
5. $|z + w| \leq |z| + |w|$

Trigonometrikus alak

- Argumentum
  $z \neq 0$ esetén az a z argumentuma $\forall t \in \mathbb{R}$, melyre $\mathrm{Re}(z) = |z|\cos(t)$, és $\mathrm{Im}(z) = |z|\sin(t)$. Más szóval a z argumentuma az origóból a z-be mutató vektor és a pozitív valós tengellyel bezárt szöge.
- Trigonometrikus alak
  A z komplex szám trigonometrikus alakja: $z = |z|(\cos(t) + i \cdot \sin(t)$
- Moivre-azonosságok
  Legyen $z = |z|(\cos(t) + i \cdot \sin(t))$, és $w = |w|(\cos(s) + i \cdot \sin(s))$. Ekkor

$$z \cdot w = |z||w|(\cos(t + s) + i \cdot \sin(t + s))$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(t - s) + i \cdot \sin(t - s)) \quad (w \neq 0)$$

$$z^n = |z|^n(\cos(nt) + i \cdot \sin(nt)) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

- Gyökvonás
  Legyen $z^n = w$ ekkor:

$$\sqrt[n]{w} = \left\{ z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{t + 2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{t + 2k\pi}{n}\right)\right), k = 0, ..., n - 1 \right\}$$

  De mivel ez a jelöltés összetéveszthető a valósak között (egyértelművé tett) valós gyökvonással. így ezt a jelölést nem használjuk. Vezessük be helyette a n-edik komplex egységgyök fogalmát:

$$\varepsilon_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, ..., n - 1$$

  Ezek után a w gyökeit a z és az n-edik komplex egységgyökök segítségével kaphatjuk meg: $z\varepsilon_0, ..., z\varepsilon_{n-1}$

1.4 Leszámlálások véges halmazokon

Véges halmazok

- Halmazok ekvivalenciája
  X, Y halmazok ekvivalensek, ha létezik X-et Y-ra képező bijekció.
  Jele: $X \sim Y$
- Véges és végtelen halmazok
  X halmaz véges, ha $\exists n \in \mathbb{N} : X \sim \{1, 2, ..., n\}$, egyébként végtelen. Ha létezik n, akkor az egyértelmű, és ekkor a halmaz elemszámának/számosságának nevezzük. Jele: $\#(X)$

Skatulya elv

Ha X, Y véges halmazok és $\#(X) > \#(Y)$, akkor egy $f : X \to Y$ leképezés nem lehet kölcsönösen egyértelmű (azaz bijekció).

Leszámolások

- Permutáció
  A halmaz egy permutációja az önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezése. Az A halmaz összes permutációjának száma:
  $$P_n = \prod_{k=1}^{n} k \ = \ n!$$
- Variáció
  Az A halmaz elemeiből készíthető, különböző tagokból álló $a_1, a_2, ..., a_k$ sorozatokat az A halmaz k-ad osztályú variációinak nevezzük. Ha A véges ($\#(A) = n$), akkor V_n^k száma megegyezik az $\{1, 2, ..., k\}$-t $\{1, 2, ..., n\}$-be képező kölcsönösen egyértelmű leképezések számával:
  $$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$
- Kombináció
  Ha A halmaz $k \in \mathbb{N}$ elemű részhalmazait k-ad osztályú kombinációinak nevezzük. Ha A véges, akkor C_n^k száma megegyezik $\{1, 2, ..., n\}$ k elemű részhalmazainak számával.
  $$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
- Ismétléses permutáció
  $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$ halmaz elemeinek ismétlődései $i_1, \ldots, i_r$. (Az elemek ismétléses permutációi olyan $i_1 + \cdots + i_r = n$ tagú sorozatok, melyben az a_j elem i_j-szer fordul elő.)
  $$P_n^{i_1,\ldots,i_r} = \frac{n!}{i_1! i_2! \cdots i_r!}$$
- Ismétléses variáció
  Az A véges halmaz elemeiből készíthető (nem feltétlenül különböző) $a_1, \cdots, a_k$ sorozatokat, az A halmaz k-ad osztályú ismétléses variációinak nevezzük.
  $$^{i}V_n^k = n^k$$
- Ismétléses kombináció
  Az A véges halmaz. A halmazból k elemet kiválasztva, ismétléseket megengedve, de a sorrend figyelmen kívül hagyva, az A halmaz k-ad osztályú ismétléses kombinációit kapjuk.
  $$^{i}C_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

Tételek

- Binomiális tétel
  $x, y \in R$ (kommutatív egységelemes gyűrű), $n \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

- Polinomiális tétel
  $r, n \in \mathbb{N}$ és $x_1, x_2, \cdots, x_r \in R$ (kommutatív egységelemes gyűrű), ekkor

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n = \sum_{i_1+\cdots+i_r=n} P_n^{i_1,\cdots,i_r} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_r^{i_r} \qquad (i_1, \cdots, i_r \in \mathbb{N})$$

- Szita formula
  $X_1, \cdots, X_k \subset X$ (véges halmaz). f az X-en értelmezett, egy Abel-csoportba képző függvény. Legyen:

$$S = \sum_{x \in X} f(x)$$

$$S_r = \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_r \le k} \left(\sum_{x \in X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_r}} f(x) \right)$$

  és

$$S_0 = \sum_{x \in X \setminus \cup_{i=1}^{k} Xi} f(x)$$

  Ekkor

$$S_0 = S - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^k S_k$$

1.5 Számelméleti alapfogalmak, lineáris kongruencia-egyenletek

1.5.1 Számelméleti alapfogalmak

Oszthatóság egységelemes integritási tartományban

R egységelemes integritási tartomány, $a, b \in R$. Ha $\exists c \in R : a = bc$, akkor b osztója a-nak (a a b többszöröse). Jele: $b|a$

A $b = 0$-t kivéve legfeljebb egy ilyen c létezik.

Az oszthatóság tulajdonságai egységelemes integritási tartományban.

- Ha $b|a$ és $b'|a'$, akkor $bb'|aa'$
- $\forall a \in R : a|0$ (a nullának minden elem osztója)
- $0|a \Leftrightarrow a = 0$ (a null csak saját magának osztója)
- $\forall a \in R : 1|a$ (az egységelem minden elem osztója)
- $b|a \Rightarrow \forall c \in R : bc|ac$
- $bc|ac$ és $c \neq 0 \Rightarrow b|a$
- $b|a_i$ és $c_i \in R$, $(i = 1, \cdots, j) \;\Rightarrow\; b|\sum_{i=1}^{j} a_i c_i$
- az $|$ reláció reflexív és tranzitív

Felbonthatatlan elem és prímelem

$0, 1 \neq a \in R$ felbonthatatlan (irreducibilis), ha $a = bc$ esetén b vagy c egység ($b, c \in R$).

$0, 1 \neq p \in R$ prím, ha $\forall a, b \in R : p|ab$ esetén $p|a$ vagy $p|b$

Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, relatív prím

R egységelemes integritási tartomány. $a_1, \cdots, a_n \in R$ elemeknek $b \in R$ legnagyobb közös osztója, ha $b|a_i$ és $b'|a_i$ esetén $b'|b$. Ha b egység, akkor $a_1, \cdots, a_n$ relatív prímek.

$a_1, \cdots, a_n \in R$ elemeknek legkisebb közös többszöröse $b \in R$, ha $a_i|b$ és $a_i|b'$ esetén $b|b'$.

Bővített euklideszi algoritmus

Az eljárás meghatározza az $a, b \in \mathbb{Z}$ számok legnagyobb közös osztóját ($d \in \mathbb{Z}$), valamint $x, y \in \mathbb{Z}$ számokat úgy, hogy $d = ax + by$

A számelmélet alaptétele

Minden pozitív természetes szám (sorrendtől eltekintve) egyértelműen felbontható prímszámok szorzataként.

Erathoszthenész szitája

Adott n-ig a prímek meghatározásához: Írjuk fel a számokat 2-től n-ig. Az első szám (2) prím, összes többszöröse összetett, ezeket húzzuk ki. A fennmaradó számok közül az első (3) ugyancsak prím, stb. Az eljárás végén az n-nél nem nagyobb prímek maradnak.

1.5.2 Lineáris kongruencia egyenletek

Kongruencia

Ha $a, b, m \in \mathbb{Z}$ és $m|(a-b)$, akkor azt mondjuk, hogy a és b kongruensek modulo m (Jele: $a \equiv b \mod m$).

A kongruencia ekvivalenciareláció bármely m-re. Ha $a \in \mathbb{Z}$ akkor az ekvivalenciaosztály elemei $a + km, k \in \mathbb{Z}$ alakúak.

Maradékosztályok

Az $m \in \mathbb{Z}$ modulus szerinti ekvivalenciaosztályoknak nevezzük. A maradékosztályokat elemeikkel reprezentáljuk. (Az a elem által reprezentált maradékosztály $\widetilde{a} \mod m$).

Ha egy maradékosztály valamely eleme relatív prím a modulushoz, akkor mindegyik az és a maradékosztályt redukált maradékosztálynak nevezzük.

Páronként inkongruens egészek egy rendszerét maradékrendszernek nevezzük.

Ha egy maradékrendszer minden maradékosztályból tartalmaz elemet, akkor teljes maradékrendszer.

Ha maradékrendszer pontosan a redukált maradékosztályokból tartalmaz elemet, akkor redukált maradékrendszer.

Euler-féle φ függvény

$m > 0$ egész szám. Az Euler-féle $\varphi(m)$ függvény a modulo m redukált maradékosztályok számát adja meg. Ez nyilván megegyezik a $0, 1, \cdots, m-1$ számok közötti, m-hez relatív prímek számával.

Euler-Fermat tétel

$m > 1$ egész, a relatív prím m-hez, ekkor:

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod m$$

Fermat tétel

Legyen p prím, és $a \in \mathbb{Z} : p \nmid a$, ekkor

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p$$

Lineáris kongruencia megoldása

Keressük az $ax \equiv b \mod m$ kongruencia megoldásait ($a, b, m \in \mathbb{Z}$ ismert). Ez ekvivalens azzal, hogy keressünk olyan x-et, melyre (valamely y-nal) $ax + my = b$.

Legyen $d = \text{lnko}(a, m)$. Mivel d osztója $ax + my$-nak, b-t is osztania kell, különben nincs megoldás. Így $\frac{a}{d}x + \frac{m}{d}y = \frac{b}{d}$. Ekkor $a'x + m'y = 1$. A bővített euklideszi algoritmus segítségével olyan u, v számokat kapunk, melyekkel $a'u + m'v = 1$ (ui.: a', m' relatív prímek). Az egyenletet b'-vel beszorozva $a'ub' + m'vb' = b' \Rightarrow x \equiv ub' \mod m'$

Lineáris kongruenciarendszer megoldása

Két lineáris kongruencia esetén a megoldások $x \equiv a \mod m$ és $x \equiv b \mod n$. A közös megoldáshoz $x = a + my = b + nz \Leftrightarrow my - nz = b - a$ egyenletet kell megoldani. Akkor és csak akkor van megoldás, ha $d = \text{lnko}(m, n)$ osztója $b - a$-nak. Ekkor a megoldás valamely x_1 egésszel $x \equiv x_1 \mod \text{lkkt}(m, n)$ alakban írható. (Több kongruencia esetén az eljárás folytatható.)

Kínai maradéktétel

$1 < m_1, \cdots, m_n \in \mathbb{N}$ páronként relatív prímek, és $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{Z}$. Az $x \equiv c_j \mod m_j$ ($j = 1, \cdots, n$) kongruenciarendszer megoldható, és bármely két megoldása kongruens $\mod m_1 m_2 \cdots m_n$

2 Gráfok

2.1 Általános és síkgráfok

Alapfogalmak

- Irányítatlan gráf
  Egy irányítatlan gráf a $G = (V, E, \varphi)$ rendezett 3-as, ahol:
  V - a csúcsok halmaza
  E - élek halmaza
  φ - illeszkedési reláció ($\varphi \in E \times V$)
  Ha $v \in \varphi(e)$, akkor v illeszkedik az e élre. ($v \in V, e \in E$). Egy élnek mindig két vége van
- Él-, és csúcstípusok
  - Izolált csúcs
    $v \in V$ izolált csúcs, ha $\nexists e \in E : v \in \varphi(e)$
  - Párhuzamos él
    $e, e' \in E$ élek párhuzamos élek, ha $\varphi(e) = \varphi(e')$
  - Hurokél
    $e \in E$ hurokél, ha $|\varphi(e)| = 1$
- Irányított gráf
  Egy irányítatott gráf a $G = (V, E, \psi)$ rendezett 3-as, ahol:
  V - a csúcsok halmaza
  E - élek halmaza
  ψ - illeszkedési reláció ($\psi \in E \to V \times V$)
  $\psi(e) = (v, v')$, *ahol v az e él kezdőpontja, v' a végpontja.*

Véges, egyszerű gráfok - alapfogalmak

- Egyszerű gráf
  G gráf egyszerű, ha nem tartalmaz párhuzamos vagy hurokéleket
- Véges gráf $G = (V, E, \varphi)$ gráf véges, ha V, E véges halmazok.
- Szomszédság, fok
  Két él szomszédos, ha van közös pontjuk.
  Két csúcs szomszédos, ha van közös élük.
  $v \in V$ szomszédjainak száma a v foka. [Jele: $\deg(v) = \mathrm{d}(v)$]
- r-reguláris gráfok
  G gráf r-reguláris, ha minden pont foka r
- Teljes gráf
  G gráf teljes gráf, ha minden él be van húzva, más szóval $(|V| - 1)$-reguláris. (Jele: $K_{|V|}$)
- Páros gráf
  G páros gráf, ha $V = V' \cup V''$ és $V' \cap V'' = \emptyset$ (diszjunkt), valamint él csak V' és V'' között fut.
  Ha viszont így V' és V'' között minden él be húzva, akkor teljes páros gráf. (Jele: $K_{n,m}$, ahol $n = |V'|, m = |V''|$)
- Részgráf
  $G = (V, E, \varphi)$ részgráfja $G' = (V', G', \varphi')$-nek, ha $V \subset V \ \wedge \ E \subset E' \ \wedge \ \varphi \subset \varphi'$
- Séta, vonal, út
  G gráfban egy n hosszú séta v-ből v'-be egy olyan

  $$v_0, e_1, v_1, \cdots, v_{n-1}, e_n, v_n$$

  sorozat, melyre $v = v_1, v' = v_n$ és $v_{i-1}, v_i \in \varphi(e_i)$
  Egy séta vonal, ha minden él legfeljebb egyszer szerepel a sorozatban.
  Egy vonal út, ha minden csúcs legfeljebb egyszer szerepel a sorozatban.
  Egy séta/vonal/út zárt, ha kezdő és végpontja megegyezik, egyébként nyílt.

- Összefüggő gráf Egy gráf összefüggő, ha bármely két csúcs közt van út.
  Ez a reláció ekvivalenciareláció, melynek ekvivalenciaosztályait komponenseknek nevezzük.
- Címkézett, Súlyozott gráf
  $G = V, E, \varphi, C_e, c_e, C_v, c_v)$ rendezett 7-es címkézett gráfot jelöl, ahol C_e, C_v tetszőleges halmazok, és

$$c_e : E \to C_e$$
$$c_v : E \to C_v$$

  Ha $C_e = C_v = \mathbb{R}^+$, akkor a gráfot súlyozott gráfnak nevezzük, és w a csúcs/él súlya. $(w(e) = c_e(e),\ w(v) = c_v(v))$

Síkba rajzolhatóság

Fogalmak

- Síkba rajzolhatóság
  Egy gráf síkba rajzolható, ha lerajzolható úgy, hogy az elei nem keresztezik egymást.
- Topologikus izomorfia
  Két gráf topologikusan izomorf, ha a következő lépést illetve fordítottját véges sok ismétlésével egyikből a másikat kapjuk: Egy másodfokú csúcsot elhagyunk, és a szomszédjait összekötjük.
- Tartomány
  Ha G gráf síkba rajzolható, akkor a tartományok az élek által határolt síkidomok. (A nem korlátolt síkidom is tartomány.)

Tételek

1. Minden véges gráf $\mathbb{R}^3$-ban lerajzolható.
2. Ha egy véges gráf síkba rajzolható $\iff$ gömbre rajzolható
3. Euler-tétel:
   Ha a G véges gráf összefüggő, síkba rajzolható gráf, akkor:

$$|E| + 2 = |V| + |T|$$

4. Kuratowsky-tétel:
   Egy véges gráf pontosan akkor síkba rajzolható, ha nem tartalmaz K_5-tel, vagy $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot.

2.2 Fák

Fa

Egy gráfot fának nevezünk, ha összefüggő és körmentes.

Feszítőfa

F részgráfja G-nek. Ha F fa és csúcsainak halmaza megegyezik G csúcsainak halmazával, akkor F-et a G feszítőfájának nevezzük.

Tételek

- Ha G egyszerű gráf, akkor a következő feltételek ekvivalensek:
  1. G fa
  2. G összefüggő, de bármely él törlésével már nem az
  3. Két különböző csúcs között csak egy út van
  4. G körmentes, de egy él hozzáadásával már nem az
- Ha G egyszerű véges gráf, akkor a következő feltételek ekvivalensek:
  1. G fa
  2. G-ben nincs kör és $n - 1$ éle van
  3. G összefüggő és $n - 1$ éle van

Irányított fa

Olyan fa, melyre: $\exists v \in V : d^-(v) = 0$ és $\forall v' \neq v : d^-(v') = 1$ (Egy csúscs befoka 0, a többié 1)

További fogalmak:

- $r \in V, d^-(r) = 0$ csúcsot gyökérnek nevezzük
- v' csúcs szintje a r, v' út hossza
- $(v, v') \in \psi(e)$, a v szülője v'-nek, v' gyereke, v-nek.
- v levél, ha $d^+(v) = 0$

2.3 Euler- és Hamilton-gráfok

2.3.1 Euler-gráf

Euler-vonal

Az Euler-vonal olyan vonal v-ből v'-be a gráfban, amelyben minden él szerepel. Ha $v = v'$ akkor ezt a vonalat Euler-körvonalnak is szokás nevezni. Euler-vonallal rendelkező gráfot Euler-gráfnak nevezik.

Tétel

Egy összefüggő véges gráfban pontosan akkor létezik Euler-körvonal, ha minden csúcs páros fokú.

2.3.2 Hamilton-gráf

A Hamilton-út egy olyan út v-ből v'-be a gráfban, mely minden csúcsot tartalmat. Ha $v = v'$ akkor ezt az utat Hamilton-körnek is szokás nevezni. Hamilton-úttal rendelkező gráfot Hamilton-gráfnak nevezik.

2.4 Gráfok adatszerkezetei

Gráfok számítógépes reprezentációjához legtöbbször láncolt listákat, vagy mátrixokat szoktak használni. A láncolt listák inkább ritka gráfokra, míg a mátrixok sűrű gráfok esetén gazdaságosak.

Illeszkedési mátrix

$G = (V, E, \psi)$ irányított gráf esetén a gráfot egy $A = \{0, 1, -1\}^{n \times m}$ mátrix segítségével tudjuk reprezentálni, ahol $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$, és $E = \{e_1, \cdots, e_m\}$. Ekkor a mátrix egyes elemei:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } v_i \text{ kezdőpontja } e_j\text{-nek} \\ -1 & \text{ha } v_i \text{ végpontja } e_j\text{-nek} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Ha G nem irányított, akkor $a_{ij} = |a_{i,j}|$

Csúcsmátrix

A fenti jelölésekkel irányított esetben $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, ahol b_{ij} a v_i-ből v_j-be menő élek számát jelöli.

Ha G irányítatlan, akkor b_{ii} v_i hurokéleinek száma, egyébként b_{ij} a v_i és v_j csúcsok közötti élek száma.

3 Kódoláselmélet

3.1 Polinomok és műveleteik

Definíció

Legyen R gyűrű. Egy polinomot egy $\sum_{i=0}^{n} f_i x^i$ alakú véges összegnek tekintünk, ahol $n \in \mathbb{N}, f_i \in R$.

Az f_n tagot a polinom főegyütthatójának nevezzük.

Műveletek

Legyen $R[x]$ az $f = (f_0, f_1, \cdots)$ végtelen sorozatok feletti gyűrű (polinomok gyűrűje), ahol $f_i \in R$. Ekkor az $R[x]$-beli műveletek:

- Összeadás:

$$f + g = (f_0 + g_0, f_1 + g_1, \cdots) \qquad (f, g \in R[x])$$

- Szorzás:

$$f \cdot g = h = (h_0, h_1, \cdots) \qquad (f, g, h \in R[x]), \text{ ahol}$$
$$h_k = \sum_{i+j=k} f_i g_j$$

Megjegyzés: Ha R kommutatív, akkor $R[x]$ is az. Ha R egységelemes az 1 egységelemmel, akkor $R[x]$ is az az $(1, 0, 0, \cdots)$ egységelemmel.

3.2 Maradékos osztás

Legyen R egységelemes integritási tartomány, $f, g \in R[x], g \neq 0$ és tegyük fel, hogy g főegyüttható egység R-ben. Ekkor

$$\exists! q, r \in R[x] : f = g \cdot q + r \qquad (\deg(r) < \deg(g))$$

3.3 Horner-séma

A Horner-módszer egy polinom helyettesítési értékének kiszámítására alkalmas. (Ezzel együtt természetesen az is eldönthető, hogy adott c érték a polinom gyöke-e vagy nem. 4-ed fok felett erre még analitikus megoldás sincs.)

A módszer lényege, hogy az egyébként $f_n x^n + f_{n-1} x^{n-1} + \cdots + f_0$ polinom helyettesítési értékének kiszámolásához rendkívül sok szorzásra és összeadásra lenne szükség. A polinom átalakításával azonban a műveletek számát lecsökkenthetjük. A maradékos osztást alkalmazva:

$$f_n x^n + f_{n-1} x^{n-1} + \cdots + f_0 = (f_n x^{n-1} + f_{n-1} x^{n-2} + \cdots) x + f_0$$

Ezt rekurzívan folytatva a következő alakra jutunk:

$$(((f_n x + f_n - 1) x + f_n - 2) x + \cdots) x + f_0$$

A helyettesítési érték kiszámítását egy táblázatban könnyebben elvégezhetjük.

	f_n	f_{n-1}	f_{n-2}	$\cdots$	f_0
c	f_n	$f_n c + f_{n-1}$	$(f_n c + f_{n-1})c + f_{n-2}$	$\cdots$	$f(c)$

A táblázat kitöltése a következőképp zajlik:

1. Az első sorba felírjuk a polinom együtthatóit
2. A második sor első cellájába beírjuk az argumentum értékét.
3. A főegyüttható alá beírjuk önmagát.
4. A második sor celláinak kitöltésével folytatjuk
5. Az előző cella elemét megszorozzuk az argumentummal
6. A szorzathoz adjuk hozzá az aktuális együtthatót
7. Az összeget írjuk be az aktuális cellába
8. Folytassuk az 5. ponttal, míg el nem jutunk az utolsó celláig

Az utolsó cellába a polinom helyettesítési értéke kerül. (Ha ez nulla, akkor az argumentum a polinom gyöke.)

3.4 Betűnkénti kódolás

A kódolás a legáltalánosabb értelemben az üzentek halmazának egy másik halmazba való leképzését jelenti. Gyakran az üzenetet valamilyen karakterkészlet elemeiből alkotott sorozattal adjuk meg. Ekkor az üzenetet felbontjuk előre rögzített olyan elemi részekre, hogy minden üzenet egyértelműen előálljon ilyen elemi részek sorozataként. A kódoláshoz megadjuk az elemi részek kódját, amelyet egy szótár tartalmaz. Az ilyen kódolást betűnkénti kódolásnak nevezzük.

A kódolandó üzenetek egy A ábécé betűi, és egy-egy betű kódja egy másik, B ábécé (kódábécé) betűinek felel meg. Tegyük fel, hogy mind két ábécé nem üres és véges.

Egy A ábécé betűiből felírható szavak halmazát A^+-szal jelöljük, míg az üres szóval kiterjesztettet A^*-gal.

Ez alapján a betűnkénti kódolást egy $\varphi : A \to B^*$ leképezés határozza meg, amelyet kiterjeszthetünk egy $\psi : A^* \to B^*$ leképezéssé, alábbi módon: Ha $\alpha_1\alpha_2...\alpha_n = \alpha \in A$, akkor α kódja $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)...\varphi(\alpha_3)$. Nyilván ha φ nem injektív (vagy az üres szó benne van az értékkészletében), akkor a ψ kódolás sem injektív, azaz nem egyértelműen dekódolható. Emiatt feltehetjük, hogy φ injektív, és B^+-ba képez.

3.5 Shannon- és Huffman-kód

Alapfogalmak

- Gyakoriság, relatív gyakoriság, eloszlás
  Az információforrás n üzenetet bocsájt ki. A különböző üzeneteket jelöljük $a_1, \cdots, a_m$-mel. a_i üzenet k_i-szer fordul elő, melyet gyakoriságnak nevezzük. Az a_i relatív gyakorisága a $p_i = k_i/n$. A $p_1, \cdots, p_m$ szám m-est az üzentek eloszlásának nevezzük. ($\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$)
- Információtartalom
  Az a_i üzenet egyedi információtartalma $I_i = -\log_r p_i$, ahol $r > 1$ az információ egysége. ($r = 2$ esetén az egység a bit).
- Entrópia
  Az üzenetforrás által kibocsátott átlagos információtartalmat nevezzük entrópiának:

$$H_r(p_1, \cdots, p_m) = -\sum_{i=1}^{m} p_i \log_r p_i$$

- Prefix, szuffix, infix
  Legyen $\alpha, \beta, \gamma \in A$ szavak. Ekkor az $\alpha\beta\gamma$ szónak α prefixe, β infixe, γ pedig szuffixe.
- Kódfa
  A betűnkénti kódoláshoz egyértelműen adható meg egy szemléletes irányított, élcímkézett fa. Legyen $\varphi : A \to B^*$ a betűnkénti kódolás. Készítsünk el egy olyan fát, melynek a gyökere az üres szó és ha $\beta = \alpha b \quad (b \in B)$-re, akkor α-ból húzódjon olyan él β-ba, melynek b címkéje van. Ekkor minden azonos hosszú szó egy szinten lesz. Azokat a csúcsokat, melyekből minden $b \in B$ címkével vezet ki él teljes csúcsnak nevezzük, különben csonka csúcsok.
- Prefix kód, egyenletes kód, vesszős kód
  A $\varphi : A \to B^+$ injektív leképezés által meghatározott $\psi : A^* \to B^*$ betűnkénti kódolás
  1. felbontható (egyértelműen dekódolható), ha ψ injektív
  2. prefix kód, ha φ értékkészlete prefixmentes.
  3. egyenletes kód (fix hosszúságú), ha ψ értékkészletében minden elem megegyező hosszú
  4. vesszős kód, ha $\exists \vartheta \in B^+$ vessző, hogy ϑ szuffixe minden kódszónak, de sem prefixe, sem infixe semelyik kódszónak.
- Átlagos szóhosszúság
  Legyen $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ a kódolandó ábécé. Az a_i kódjának hossza l_i. Ekkor $\bar{l} = \sum_{i=1}^{n} p_i l_i$ a kód átlagos szóhosszúsága.
- Optimális kód
  Ha egy adott elemszámú ábécével és adott eloszlással egy felbontható betűnkénti kód átlagos szóhoszúsága minimális, akkor optimális kódnak nevezzük.

Shannon-kód

Shannon kód egy optimális kód (r elemszámú ábécével és p_i gyakoriságokkal), melyet a következő módon állítunk elő.

1. Rendezzük a betűket relatív gyakoriságaik alapján csökkenő sorrendbe.
2. Határozzuk meg az $l_1, \cdots, l_n$ szóhosszúságokat a következő módon:

$$r^{-l_i} \leq p_i < r^{-l_i+1}$$

3. Osszuk el az ábécé elemeit az egyes helyiértékeken.

Példa:

Legyen a kódábécé a $0, 1, 2$ halmaz, az kódolandó betűk és gyakoriságaik pedig a következők:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
0,17	0,02	0,13	0,02	0,01	0,31	0,02	0,17	0,06	0,09

A relatív gyakoriságok rendezése után:

f	a	h	c	j	i	b	d	g	e
0,31	0,17	0,17	0,13	0,09	0,06	0,02	0,02	0,02	0,01

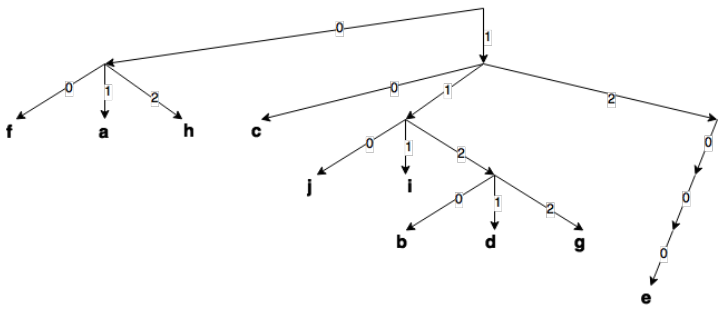
Határozzuk meg szóhosszúságokat. Az f, a, h és c esetében: $3^{-2} = r^{-l_i} \leq p_i < r^{-l_i+1} = 3^{-1}$ Tehát azok szóhosszúsága 2. A többi esetben is így járunk el:

f	a	h	c	j	i	b	d	g	e
0,31	0,17	0,17	0,13	0,09	0,06	0,02	0,02	0,02	0,01
2	2	2	2	3	3	4	4	4	5

Ezek alapján f kódszava a 00, a kódszava a 01, h-hoz a 02 tartozik, míg c-hez 10. A j-hez ezek után 11 tartozna, de mivel az 3 hosszú, így 110. A kódszavak tehát a következőképp alakulnak:

f	a	h	c	j	i	b	d	g	e
0,31	0,17	0,17	0,13	0,09	0,06	0,02	0,02	0,02	0,01
2	2	2	2	3	3	4	4	4	5
00	01	02	10	110	111	1120	1121	1122	12000

A kódfát 1. ábrán láthatjuk.



ábra 1: Shannon-kód példa kódfája

Huffman-kód

A Huffman-kód is optimális kód (r elemszámú ábécével és p_i gyakoriságokkal), melyet a következő módon állítunk elő.

1. Rendezzük a betűket relatív gyakoriságaik alapján csökkenő sorrendbe.
2. Annak érdekében, hogy csak egy csonka csúcs keletkezzen

$$m \equiv n \mod r - 1$$

kongruenciának teljesülnie kell, ahol m az egyetlen csonka csúcs kifoka. Ami ekvivalens azzal, hogy $m = 2 + ((n-2) \mod r - 1)$. Tehát osszuk el $n-2$-t $r-1$-gyel, és így m a maradék+2 lesz.

3. Az első lépésben a sorozat m utolsó betűjét összevonjuk (új jelölést/betűt adunk neki), és ennek a relatív gyakorisága a tagok relatív gyakoriságának összege lesz. Rendezzük a sorozatot. Ezen lépés után már a betűk száma kongruens $r-1$-gyel, így a következő redukciós lépésekben mindig teljes csúcsokat tudunk készíteni.
4. Az utolsó r betűt vonjunk össze, helyettesítsük egy új betűvel és relatív gyakoriság legyen a relatív gyakoriságok összege.
5. A 4-beli redukciós lépést addig ismételjük míg r db betű nem marad. Ekkor rendre minden betűhöz a kódábécé egy-egy betűjét rendeljük.
6. Ha redukált elemmel találkozunk szétbontjuk, majd az ő elemeihez is a kódábécé betűit rendeljük, de konkatenáljuk az előzővel.
7. A 6-beli lépést addig ismételjük míg marad redukált elem.

Példa:

A Shannon-kódnál látott forrást kódoljuk be ugyanúgy $\{0,1,2\}$ kódábécével.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
0,17	0,02	0,13	0,02	0,01	0,31	0,02	0,17	0,06	0,09

Rendezzük relatív gyakoriság szerint:

f	a	h	c	j	i	b	d	g	e
0,31	0,17	0,17	0,13	0,09	0,06	0,02	0,02	0,02	0,01

Osszuk el $n-2$-t $r-1$-gyel: $10-2=4*(3-1)+0$. Így m a maradék+2, azaz $m=2$. Az utolsó m betűt összevonjuk, és rendezzük a sorozatot:

f	a	h	c	j	i	(g,e)	b	d
0,31	0,17	0,17	0,13	0,09	0,06	0,03	0,02	0,02

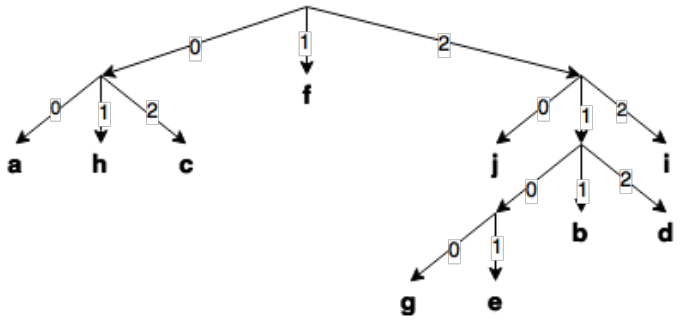
Innentől kezdve minden redukciós lépésben az utolsó r db azaz 3 betűt vonjuk össze:

f	a	h	c	j	((g,e), b, d)	i
0,31	0,17	0,17	0,13	0,09	0,07	0,06

Ezt addig ismételjük, míg r darab betű marad:

(a,h,c)	f	(j,((g,e),b,d),i)
0,47	0,31	0,22

A szétbontás alapján a 2. ábrán látható fát tudjuk összeállítani.



ábra 2: Huffman-kód példa kódfája

Ezek alapján a kódtábla:

betű	gyakoriság	kód
f	0,31	1
a	0,17	00
h	0,17	01
c	0,13	02
j	0,09	20
i	0,06	22
b	0,02	211
d	0,02	212
g	0,02	2100
e	0,01	2101

3.6 Hibajavító kódok, kódtávolság

Hibakorlátozó kódolás

A hibakorlátozó kódokat két csoportba sorolhatjuk: hibajelző és hibajavító kódok. Mindkét esetben az üzenetekhez kódszavakat rendelünk, amik alapján az átvitel során keletkező hibákat kezelni tudjuk. Ha az üzenet könnyen ismételhető hibajelző, ha nehezen ismételhető hibajavító kódot alkalmazunk. A hibakorlátozó kódoknál mindig azonos hosszúságú kódszavakat használunk.

Kódok távolsága, súlya

A kódábécé u és v szavának Hamming-távolsága $d(u,v)$ az azonos pozícióban levő, eltérő jegyek száma. A Hamming-távolság rendelkezik a távolság szokásos tulajdonságaival, vagyis $\forall u,v,z$:

- $d(u,v) \geq 0$
- $d(u,v) = 0 \iff u = v$
- $d(u,v) = d(v,u)$ - szimmetria
- $d(u,z) \leq d(u,v) + d(v,z)$ - háromszög egyenlőtlenség

A kód távolsága $d(C) = \min\limits_{u \neq v} d(u,v) \qquad (u,v \in C)$

Amennyiben az A kódábécé Abel-csoport a 0 nullelemmel. Ekkor egy u szó Hamming-súlya ($w(u)$) a szóban szereplő nem nulla elemek száma. Ekkor a kód súlya $w(C) = \min\limits_{u \neq 0} w(u)$

Hibajavító kód

Amikor egy olyan szót kapunk, ami nem kódszó, a hozzá legkisebb Hamming-távolságú kódszóra javítjuk.

A K kód t-hibajavító, ha egy legfeljebb t helyen megváltozott kódot helyesen javít. A K kód pontosan t-hibajavító, ha t-hibajavító, de nem $t+1$-hibajavító.

Megjegyzés: d minimális távolságú kód esetén d/2-nél kevesebb hibát biztosan egyértelműen tudunk javítani.

Hamming-korlát

Egy q elemű ábécé n hosszú szavaiból álló C kód t-hibajavító. Ekkor bármely két kódszóra a tőlünk legfeljebb t távolságra lévő szavak halmazai diszjunktak.

Mivel egy kódszótól j távolságra pontosan $\binom{n}{j}(q-1)^j$ szó van, így a Hamming-korlát a kódszavak számára adott t-nél:

$$\#(C) \cdot \sum_{j=0}^{t} \binom{n}{j} (q-1)^j \leq q^n$$

Amennyiben egyenlőség áll fent tökéletes kódról beszélünk.

3.7 Lineáris kódok

Definíció

A véges test és A^n lineáris tér. Minden $K \leq A^n$ alteret lineáris kódnak nevezzük. Ha az altér k dimenziós, a kód távolsága d és $\#(A) = q$, akkor az ilyen kódot $[n,k,d]_q$ kódnak nevezzük.

Egy lineáris kódnál feltesszük, hogy kódolandó üzenetek K^k elemei, azaz a kódábécé elemeiből képzett k-asok.

Generátormátrix

K véges test feletti $[n, k, d]_q$ lineáris kódolást válasszuk egy (kölcsönösen egyértelmű) lineáris leképezésnek:

$$G : K^k \to K^n$$

Ezt egy mátrixszal, az úgy nevezett generátormátrixszal jellemezhetjük.

Polinomkódok

Egy lineáris kód esetén az üzeneteket megfeleltethetjük $\mathbb{F}_q$ (q elemű véges test) feletti k-nál alacsonyabb fokú polinomoknak.

$$(a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}) \to a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-1} x^{k-1}$$

Legyen $g(x)$ rögzített m-edfokú polinom. A $p(x)$ polinomot (üzenet) $g(x)$-szel szorozva lineáris kódolást kapunk (mivel a $p \to pg$ kölcsönösen egyértelmű). Ekkor a kódszavak hossza $n = k + m$. Az ilyen típusú lineáris kódolást polinomkódolásnak nevezzük.

Megjegyzés: Feltehetjük, hogy $g(x)$ főpolinom (együtthatója egység), illetve a konstans tag nem nulla (ha nulla lenne, a szorzatban kiesne a konstans tag, így a kódban a nulla indexű betű soha nem hordozna információt)

CRC - Cyclic Redundancy Check

Ha egy polinomkódban $g(x)|x^n - 1$, akkor ciklikus kódról beszélünk. Ekkor, ha $a_0 a_1 \cdots a_{n-1}$ kódszó, akkor $a_{n-1} a_0 \cdots a_{n-2}$ is az, mivel:

$$a_{n-1} + a_0 x + \cdots + a_{n-2} x^{n-1} \;=\; x \cdot (a_0 + a_1 x + \cdots a_{n-1} x^{n-1}) - a_{n-1}(x^n - 1)$$

osztható $g(x)$-szel.

A CRC az $\mathbb{F}_2$ feletti ciklikus kódokat foglalja magába. Csak hibajelzésre alkalmas, a kódolás a következő: Vegyük $p(x)x^m = (0, 0, \cdots, 0, a_m, a_{m+1}, \cdots, a_{n-1})$. Ezt osszuk el $g(x)$-el maradékosan. $p(x)x^m = q(x)g(x) + r(x)$. Ekkor a kódszó legyen: $p(x)x^m - r(x) = q(x)g(x)$, amely osztható $g(x)$-szel és magas fokszámokon az eredeti üzenet betűi helyezkednek el. A vett szó ellenőrzése egyszerű: Megnézzük, hogy osztható-e $g(x)$-szel, ha nem, hiba történt.