1. Függvények határértéke, folytonossága

Jelölje a továbbiakban $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ (bővített számegyenes)

Környezet: Legyen $a \in \mathbb{R}$, és $\delta \in \mathbb{R}^+$, ekkor a

- ***Kétoldali környezet***: $K_\delta(a) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; d(x,a) = |x-a| < \delta \right\} = (a-\delta,\ a+\delta)$
- ***Bal oldali környezet***: $K_\delta(a-0) = K(a-0) = (a-\delta,\ a)$
- ***Jobb oldali környezet***: $K_\delta(a+0) = K(a+0) = (a,\ a+\delta)$
- Ha $a \in \overline{\mathbb{R}}$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor *kiterjesztett környezet*ről beszélünk, és

$$K_c(+\infty) = (c, +\infty) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; c < x \right\}$$
$$K_c(-\infty) = (-\infty, c) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x < c \right\}$$

Belső pont

Legyen $A \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz és $a \in \mathbb{R}$. Az a **belső pontja** a A halmaznak, ha az a-nak van olyan $\delta > 0$ sugarú környezete, amely részhalmaza az A-nak ($K_\delta(a) \subset A$).
Jelölése: **int A** (az A halmaz belső pontjainak halmaza).

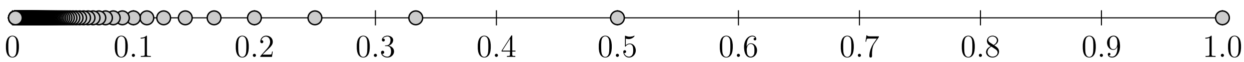
Torlódási pont

Az $a \in \overline{\mathbb{R}}$, az $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaz **torlódási pontja**, ha $\forall \delta > 0 : K_\delta(a) \cap H$ végtelen halmaz, azaz az a pont minden környezete végtelen sok H-beli elemet tartalmaz.
Jelölése: $\mathbf{H'}$ (a H halmaz torlódási pontjainak halmaza).

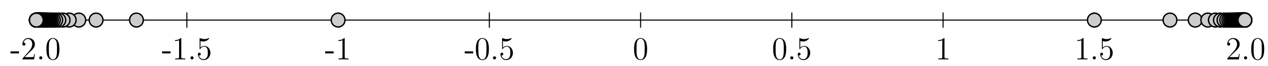
Megjegyzések:

- Az $a \in \mathbb{R}$ torlódási pontja az A-nak, ha $\forall \delta > 0 : (a-\delta, a+\delta) \cap A$ végtelen halmaz.
- Az $a = +\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontja az A-nak, ha $\forall \delta > 0 : (\delta, +\infty) \cap A$ végtelen halmaz.
- Az $a = -\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontja az A-nak, ha $\forall \delta > 0 : (-\infty, -\delta) \cap A$ végtelen halmaz.

Példa 1. Az $\left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n = 1, 2, \ldots \right\}$ egyetlen torlódási pontja a **0**.



Példa 2. A $\left\{ (-1)^n \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right) \;\middle|\; n = 1, 2, \ldots \right\}$ két torlódási pontja a **-2** és a **2**.



További példák: $\mathbb{N}' = \{+\infty\}$, $\quad \mathbb{Q}' = \overline{\mathbb{R}}$, $\quad {\mathbb{Q}^*}' = \overline{\mathbb{R}}$, $\quad (0,1)' = [0,1]$.

Nyílt halmaz

A nyílt halmaz $\iff$ $\forall a \in A,\ \exists K(a) : K(a) \subset A$, vagyis az A halmaz minden pontja belső pont.
Másképp: Adott $a,\ b \in \mathbb{R}$, ahol $a < b$. Ekkor az a és b számok által meghatározott nyílt intervallumon az $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a < x < b\right\}$ halmazt értjük. Jelölése: $\left(a, b\right)$ vagy $\left]a, b\right[$

Zárt halmaz

Komplementere nyílt halmaz.
Másképp: Adott $a,\ b \in \mathbb{R}$, ahol $a < b$. Ekkor az a és b számok által meghatározott zárt intervallumon az $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a \le x \le b\right\}$ halmazt értjük. Jelölése: $[a, b]$

Legyen $A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset$. Azt mondjuk, hogy

- A **felülről korlátos** számhalmaz, ha $\exists K \in \mathbb{R}$, hogy bármely $a \in A$ esetén $a \le K$.
  Az ilyen K szám az A halmaz egyik felső korlátja.

Legyen $A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset$ *felülről korlátos* halmaz.
Tekintsük a $B := \left\{K \in \mathbb{R} \,\middle|\, K \text{ felső korlátja az } A \text{ halmaznak}\right\}$ halmazt.
Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ a B halmaz legkisebb eleme, azaz olyan szám, amelyre

- $\alpha \in B$ (α is *felső korlátja* az A halmaznak)
- bármely $K \in B$ felső korlátra $\alpha \le K$. A kérdés csupán az, hogy van-e ilyen $\alpha \in \mathbb{R}$.

Az ilyen $\alpha \in \mathbb{R}$ számot (amely nem feltétlenül eleme az A halmaznak) a halmaz **felső határának** nevezzük. Jelölése:

$$\alpha := supA \text{ („az A halmaz szuprémuma”)}$$

A $supA$ két tulajdonsága:

- bármely $a \in A$ esetén $a \le supA$
- bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $a' \in A$, hogy $(supA) - \varepsilon < a'$.

Felső határ axiómája: Minden *felülről korlátos* $A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset$ halmaznak van *legkisebb felső korlátja.*

Legyen $A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset$. Azt mondjuk, hogy

- A **alulról korlátos** számhalmaz, ha $\exists L \in \mathbb{R}$, hogy bármely $a \in A$ esetén $a \ge L$.
  Az ilyen L szám az A halmaz egyik alsó korlátja.

Legyen $A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset$ *alulról korlátos* halmaz.
Tekintsük a $B := \left\{L \in \mathbb{R} \,\middle|\, L \text{ alsó korlátja az } A \text{ halmaznak}\right\}$ halmazt.
Legyen $\beta \in \mathbb{R}$ a B halmaz legnagyobb eleme, azaz olyan szám, amelyre

- $\beta \in B$ (β is *alsó korlátja* az A halmaznak)
- bármely $L \in B$ alsó korlátra $\beta \le L$.

Az ilyen $\beta \in \mathbb{R}$ számot (amely nem feltétlenül eleme az A halmaznak) a halmaz **alsó határának** nevezzük. Jelölése:

$$\beta := infA \text{ („az A halmaz infimuma”)}$$

Az $infA$ két tulajdonsága:

- bármely $a \in A$ esetén $infA \le a$
- bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $a' \in A$, hogy $a' < (infA) + \varepsilon$.

Akkor mondjuk, hogy a $\mathbb{R}$ valamely I részhalmaza **kompakt**, ha I *korlátos* és *zárt* halmaz.

Függvények határértéke

Intuitívan: Legyen a egy nyílt intervallum egy pontja és tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van ezen az intervallumon, kivéve esetleg magát az a helyet.
Ha az $f(x)$ függvényértékek tetszőlegesen közel kerülhetnek egy A számhoz, amennyiben az x értékek eléggé megközelítik az a-t, akkor azt mondjuk, hogy f függvény az A számhoz tart, miközben x tart a-hoz.

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in D_f' \subset \overline{\mathbb{R}}$.
Az f függvénynek az $a \in D_f'$ pontban létezik határértéke az $A \in \overline{\mathbb{R}}$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \qquad \forall x \in \Big(K_\delta(a) \setminus \{a\} \cap D_f\Big) \text{ esetén } f(x) \in K_\varepsilon(A)$$

$$\text{Jelölés: } \lim_{x \to a} f(x) = \lim_a f = A$$

Végesben vett véges határérték

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges szám, amelynek valamely δ sugarú lyukas környezetét $Dom(f)$ tartalmazza. Ekkor az $f(x)$ függvénynek az a pontban (végesben) van véges határértéke, ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ valós szám, amelynek minden $\varepsilon > 0$ sugarú környezetéhez (hiba-vagy türéshatár) található az a számnak egy olyan $\delta > 0$ sugarú környezete (küszöbhatár), amelynek minden x eleme esetén $f(x)$ az A-nak ε sugarú környezetébe esik (vagyis $f(x)$ értéke A-tól legfeljebb ε-al tér el).

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in D_f' \subset \mathbb{R}$, ekkor

$$\lim_{x \to a} f = A \in \mathbb{R}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \qquad \forall x \in D_f \quad \Big[0 < \Big|x - a\Big| < \delta \ : \Big|f(x) - A\Big| < \varepsilon\Big]$$

Ha az f *identikus leképezés*, azaz minden x-re, $f(x) = x$, akkor tetszőleges a esetén

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a$$

Ha az f *abszolút érték függvény*, azaz minden x-re $f(x) = \Big|x\Big|$, akkor tetszőleges a esetén

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \Big|x\Big| = \Big|a\Big|$$

Ha az f *konstans függvény*, azaz minden x-re $f(x) = k$ valamely k számra, akkor tetszőleges a esetén

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} k = k$$

Végesben vett végtelen határérték

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in D_f' \subset \mathbb{R}$, ekkor

Végesben vett mínusz végtelen határérték:

$$\lim_{x \to a} f = -\infty$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall K \in \mathbb{R} \qquad \exists \delta > 0 \qquad \forall x \in D_f \quad \Big[0 < \big|x - a\big| < \delta :\ f(x) < K\Big]$$

Végesben vett plusz végtelen határérték:

$$\lim_{x \to a} f = +\infty$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall K \in \mathbb{R} \qquad \exists \delta > 0 \qquad \forall x \in D_f \quad \Big[0 < \big|x - a\big| < \delta :\ f(x) > K\Big]$$

Végtelenben vett véges határérték

Mínusz végtelenben vett véges határérték:

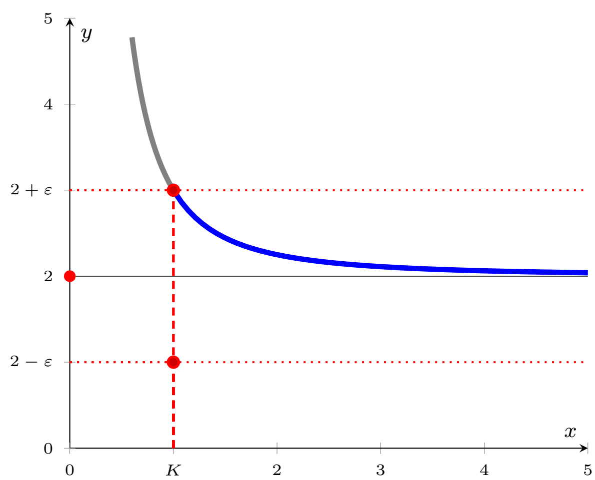
$$\lim_{x \to -\infty} f = \mathbf{A}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \omega \in \mathbb{R} \text{ (küszöbszám)} \qquad \forall x \in D_f \quad \Big[x < \omega :\ \big|f(x) - A\big| < \varepsilon\Big]$$

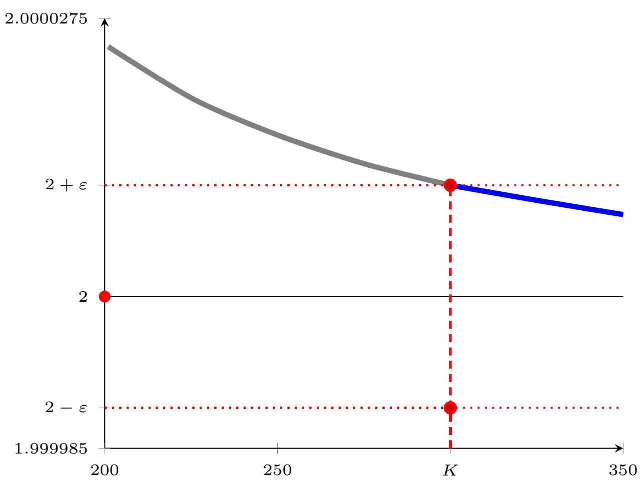
Plusz végtelenben vett véges határérték:

$$\lim_{x \to +\infty} f = \mathbf{A}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \omega \in \mathbb{R} \text{ (küszöbszám)} \qquad \forall x \in D_f \quad \Big[x > \omega :\ \big|f(x) - A\big| < \varepsilon\Big]$$

Példa: $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \dfrac{1}{x^2} = 2.$

Akárhogy választjuk az $\varepsilon > 0$ számot, lesz olyan $K > 0$, hogy ettől az értéktől kezdve minden x-re, a függvényértékek $f(x)$ 2-től vett távolsága kisebb, mint ε.





Végtelenben vett végtelen határérték

Mínusz végtelenben vett mínusz végtelen határérték:

$$\lim_{x \to -\infty} f = -\infty$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall K \in \mathbb{R} \qquad \exists \omega \in \mathbb{R} \text{ (küszöbszám)} \qquad \forall x \in D_f \quad \Big[x < \omega : \; f(x) < K \Big]$$

Mínusz végtelenben vett plusz végtelen határérték:

$$\lim_{x \to -\infty} f = +\infty$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall K \in \mathbb{R} \qquad \exists \omega \in \mathbb{R} \text{ (küszöbszám)} \qquad \forall x \in D_f \quad \Big[x < \omega : \; f(x) > K \Big]$$

Plusz végtelenben vett mínusz végtelen határérték:

$$\lim_{x \to +\infty} f = -\infty$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall K \in \mathbb{R} \qquad \exists \omega \in \mathbb{R} \text{ (küszöbszám)} \qquad \forall x \in D_f \quad \Big[x > \omega : \; f(x) < K \Big]$$

Plusz végtelenben vett plusz végtelen határérték:

$$\lim_{x \to +\infty} f = +\infty$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall K \in \mathbb{R} \qquad \exists \omega \in \mathbb{R} \text{ (küszöbszám)} \qquad \forall x \in D_f \quad \Big[x > \omega : \; f(x) > K \Big]$$

Határérték és algebrai műveletek

Legyen $A, \; B, \; \lambda \in \mathbb{R}$, és $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = A \qquad \Bigg| \qquad \lim_{x \to \alpha} g(X) = B$$

Ekkor léteznek az alábbi határértékek és fennállnak a következő összefüggések:

1. *Szorzás konstanssal*: $\lim\limits_{x \to \alpha} (\lambda \cdot f) = \begin{cases} \lambda \cdot A & \text{, ha } \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{, ha } \lambda = 0 \end{cases}$

2. *Összeg, különbség*: $\lim\limits_{x \to \alpha} (f \pm g) = A \pm B$

3. *Szorzat*: $\lim\limits_{x \to \alpha} (f \cdot g) = A \cdot B$

4. *Hányados*: $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f}{g} = \dfrac{A}{B} \; (B \neq 0)$

5. *Hatványozás*: $\lim\limits_{x \to \alpha} (f^n) = A^n, \; n \in \mathbb{Z}$ (feltéve, hogy A^n értelmezve van)

Az "eldönthetetlen" $0^0, 1^{\pm\infty}, (\pm\infty)^0, (+\infty)+(-\infty),\ 0\cdot\pm\infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ limeszeknél a függvényt próbáljuk meg úgy átalakítani, hogy az új kifejezés limesze már eldönthető legyen.

Példák:

$$\lim_{x\to\infty} x^2-x+2=\infty-\infty+2=?,\ de$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2-x+2=\lim_{x\to\infty} x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})=\infty\cdot(1-0+0)=\infty\cdot 1=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+2}{2x^2+3}=\frac{\infty}{\infty}=?,\ de$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})}{x^2(2+\frac{3}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{1}-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}}{\mathbf{2}+\underbrace{\frac{3}{x^2}}_{\to 0}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Féloldali határértékek

Az f függvény ***jobb oldali határértéke*** az a helyen az A szám (jelölése: $\lim\limits_{x\to a^+}=\lim\limits_{x\to a+0}=A$), ha

$$\forall\varepsilon>0\qquad\exists\delta>0\qquad\forall x\left[\boldsymbol{a<x<a+\delta}\Rightarrow\left|f(x)-A\right|<\varepsilon\right]$$

Az f függvény ***bal oldali határértéke*** az a helyen az A szám (jelölése: $\lim\limits_{x\to a^-}=\lim\limits_{x\to a-0}=A$), ha

$$\forall\varepsilon>0\qquad\exists\delta>0\qquad\forall x\left[\boldsymbol{a-\delta<x<a}\Rightarrow\left|f(x)-A\right|<\varepsilon\right]$$

Tétel. Az f függvénynek pontosan akkor létezik az a helyen határértéke, ha ugyanitt létezik mind a jobb, mind a bal oldali határértéke és ezek egyenlőek, azaz

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)\Leftrightarrow A\lim_{x\to a} f(x)$$

Függvények folytonossága

A függvény a-beli folytonossága azt jelenti, hogy akármilyen kicsi ε hibakorlátot is szabunk, mindig lesz az a körül olyan kis $(a-\delta,a+\delta)$ intervallum, amelyen belüli x-ekre a függvény $f(x)$ értékei a hibakorlátnál (ε-nál) kisebb mértékben térnek el $f(a)$-tól.

Formálisan: Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény az $a\in\mathcal{D}_f$ pontban folytonos, ha

$$\forall\varepsilon>0\qquad\exists\delta>0\qquad\forall x\in K_\delta(a):f(x)\in K_\varepsilon\Big(f(a)\Big)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\varepsilon>0\qquad\exists\delta>0\qquad\forall x\in\mathcal{D}_f\quad\left[0<\left|x-a\right|<\delta\Rightarrow\left|f(x)-f(a)\right|<\varepsilon\right]$$

A pontbeli folytonosság jelölése: $f\in\mathcal{C}[a]$.

Folytonos függvények és a határérték kapcsolata

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$ pontban, ha

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \text{ véges határérték és } \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Ha f a c helyen nincs értelmezve, de létezik az $L = \lim_{c} f$ határérték, akkor az

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & ,\text{ha } x \neq c \\ L & ,\text{ha } x = c \end{cases}$$

függvényt az **f *c*-re** való ***kiterjesztésének*** nevezzük.

Például $\frac{\sin x}{x}$ folytonosan kiterjeszthető az egész számegyenesen.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & ,\text{ha } x \neq 0 \\ 1 & ,\text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Állítás: Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pontosan akkor folytonos, ha

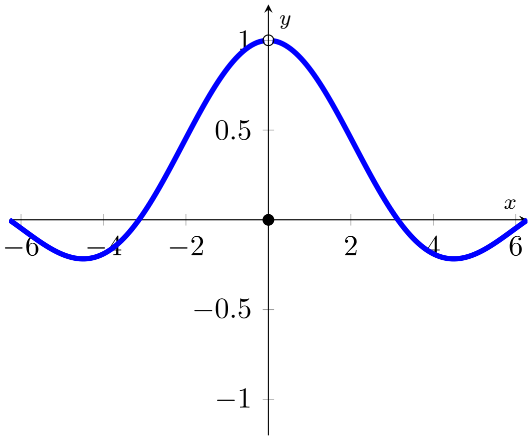
- $[a, b]$ intervallum minden belső c pontjában $\lim_{x\to c} f = f(c)$
- az a végpontban $\lim_{x\to a^+} f = f(a)$
- a b végpontban $\lim_{x\to b^-} f = f(b)$

Az a **megszüntethető szakadási pontja/helye** az f függvénynek, ha

$$\exists \lim_{x\to a} f, \text{ de } \lim_{x\to a} f \neq f(a)$$

Példa:

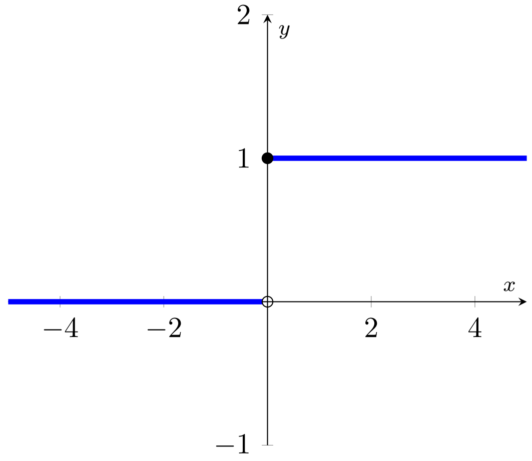
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



- $f \in \mathcal{C}[a], \ \forall a \neq 0$
- a $= 0$, megszüntethető szakadási hely, mert $\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1 \neq f(0) = 0$

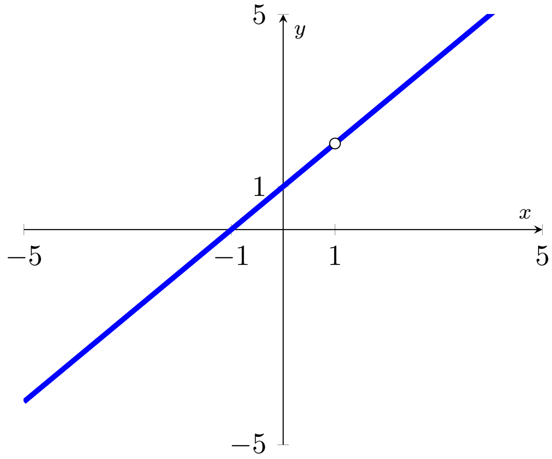
Az a **ugráshelye** az f-nek, ha $\lim\limits_{x \to a^+}$ és $\lim\limits_{x \to a^-}$ végesek, de $\lim\limits_{x \to a^+} \neq \lim\limits_{x \to a^-}$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ 1, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$



Az a **hézagpontja** az f-nek, ha $\lim\limits_{x \to a^+} \pm\infty$ és $\lim\limits_{x \to a^-} = \pm\infty$, de f nincs értelmezve a-ban.

Példa: $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ hézagpontja (x=1)-ben van.



A műveletek és a folytonosság kapcsolata

Ha $f \in \mathcal{C}[a]$ és $g \in \mathcal{C}[a]$, akkor

- $\lambda f \in \mathcal{C}[a]$ $(\lambda \in \mathbb{R})$
- $f + g \in \mathcal{C}[a], f \cdot g \in \mathcal{C}[a]$.
- $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{C}[a]$, feltéve hogy $g(a) \neq 0$.

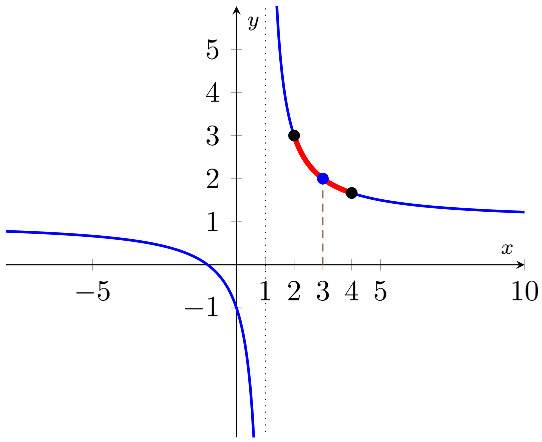
Tétel: Ha $g \in \mathcal{C}[a]$ és $f(x) \in \mathcal{C}[g(a)]$, akkor $f \circ g \in \mathcal{C}[a]$, azaz $f\big(g(x)\big) \in \mathcal{C}[a]$.

Megjegyzés: Visszafelé nem feltétlenül igaz az állítás.
Legyen $f := sgn(x)$ és $g := -sgn(x)$.
Ekkor $f + g$ az azonosan nulla függvény, és $f + g \in \mathcal{C}[0]$, de $f \notin \mathcal{C}[0]$ és $g \notin \mathcal{C}[0]$.

Az f függvény folytonos az I intervallumon, ha az intervallumra megszorított $f|_I$ függvény folytonos. Azaz, ha

$$\forall \alpha \in I : f \in \mathcal{C}[\alpha]$$

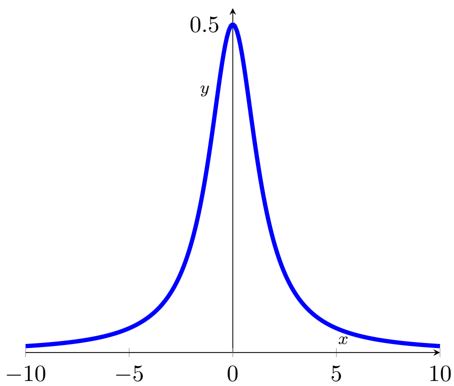
Példa olyan függvényre, amely folytonos egy zárt intervallumban. A $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ függvény például folytonos az $a = 3$ pontban a $[2, 4]$ intervallumon.



Az f függvény folytonos, ha értelmezési tartománya minden pontjában folytonos.

$$\forall x \in \mathcal{D}_f : f \in \mathcal{C}[x], \text{ akkor } f \in \mathcal{C} \text{ (} f \text{ folytonos függvény)}$$

Példa olyan függvényre, amely az egész számegyenesen folytonos.
Legyen $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2}$



Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

Tétel *(Bolzano).* Tegyük fel, hogy valamely $-\infty < a < b < +\infty$ esetén az $f \in \mathcal{C}[a, b]$ és $f(a) \cdot f(b) < 0$ (ellenkező előjelű), ekkor

$$\exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = 0$$

Tétel *(Bolzano-Darboux).* Ha $f \in C[a, b]$, és legyen d egy tetszőleges szám a $f(a)$ és $f(b)$ között. Ekkor

$$\exists c \in [a, b] : d = f(c)$$

Ez előző tétel azt mondja, hogy egy intervallumon folytonos függvény ha felvesz két értéket, akkor e két szám közötti minden értéket felvesz, ami azt jelenti, hogy egy intervallum folytonos képe intervallum.

Weierstrass-tétel

Ha $f \in \mathcal{C}[a,b]$, akkor van olyan $\alpha, \beta \in [a,b]$, amelyekre teljesül, hogy $\forall x \in [a,b]$-re

$$f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta)$$

Ez a tétel azt mondja, hogy $f\big|_{[a,b]}$ korlátos (hiszen $f(\alpha)$ és $f(\beta)$ között van a függvény minden értéke), sőt van minimuma és van maximuma is az $f\big|_{[a,b]}$ függvénynek.

A Bolzano- és a Weierstrass-tétel következménye, hogy egy *zárt*, *korlátos* intervallum folytonos képe is *korlátos* és *zárt* intervallum.

Tétel: Ha $f \in \mathcal{C}[a,b]$, akkor f korlátos $[a,b]$-ben.

Az inverzfüggvény folytonossága

Tétel: Legyen $I \in \mathbb{R}$ intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton. Tegyül fel, hogy $f \in \mathcal{C}[a]$, ahol $a \in I$. Legyen továbbá $b := f(a)$. Ekkor $f^{-1} \in \mathcal{C}[b]$

Az f függvény értelmezési tartományának egy a pontjában **jobbról folytonos**, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \qquad \forall x \left[0 \le x - a < \delta : \big| f(x) - f(a) \big| < \varepsilon \right]$$

Az f függvény értelmezési tartományának egy a pontjában **balról folytonos**, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \qquad \forall x \left[0 \le a - x < \delta : \big| f(x) - f(a) \big| < \varepsilon \right]$$

Tétel. (Átviteli elv) Az f függvény akkor és csak akkor folytonos az a pontban, ha értelmezve van az a pont környezetében, és minden $x_n \to a$ sorozatra $f(x_n) \to f(a)$.

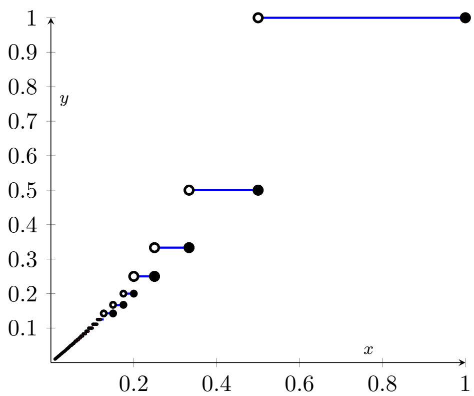
Példa olyan függvényre, amely mindenütt értelmezett, de sehol sem folytonos

$$D(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ahol a $D(x)$ függvény a *Dirichlet* függvény. Ha sorozat minden tagja racionális szám, ilyenkor ez a függvény mindig 1 értéket ad. Mégsem mondhatjuk, hogy a függvény értékeinek a sorozata tart az egyhez, hiszen bármelyik két racionális szám között végtelen sok irracionális szám van.

Az a **szakadási pontja/helye** az f függvénynek, ha f az a pontban nem folytonos ($f \notin \mathcal{C}[a]$).

Példa olyan függvény, amely egy korlátos, zárt intervallumban végtelen sok helyen szakad. Legyen



$$f : [0,1] \to \mathbb{R} = \begin{cases} \dfrac{1}{\left\lceil \dfrac{1}{x} \right\rceil} & , \text{ha } x \ne 0 \\ 0 & , \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Állítás: Ha $\exists \lim\limits_{x\to a^+}$ f, és $\lim\limits_{x\to a^+} = f(a)$, akkor f **jobbról folytonos** az a-ban.

Állítás: Ha $\exists \lim\limits_{x\to a^-}$ f, és $\lim\limits_{x\to a^-} = f(a)$, akkor f **balról folytonos** az a-ban.

Egyenletes folytonosság

Ha $H \subset \mathbb{R}$ kompakt és $f : H \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor R_f (a fv. értékkészlete) is kompakt.

Akkor mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény a $H \subset D_f$ halmazon *egyenletesen folytonos*, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \qquad \forall x,\ y \in H \ \Big[0 < \big|x-y\big| < \delta : \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon\Big]$$

Heine-tétel

Ha $H \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $\big(f : H \to \mathbb{R}\big) \in \mathcal{C}$, akkor az f a H halmazon egyenletesen folytonos.

Hatványsorok

Legyen $x,\ x_0 \in \mathbb{R}$ és $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ $\quad (a_n \in \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}_0}$ egy tetszőleges sorozat.
A következő alakú végtelen sort **hatványsornak** nevezzük.

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

- $\boldsymbol{a_i}$ $(i = 0, 1, 2 \ldots)$ számok a **hatványsor együtthatói**.
- $\boldsymbol{x_0}$ szám a hatványsor **középpontja** (centruma).
- $\boldsymbol{x}$ a hatványsor **változója**.

A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor

- konverges, ha $\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right| < \infty$ valamely x értékekre
- divergens, ha $\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right| = \infty$ valamely x értékekre
- abszolút konvergens, ha $\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} \big|a_n(x-x_0)^n\big|\right| < \infty$ valamely x értékekre

Egy hatványsor **konvergenciatartománya** alatt azt az $I \in \mathbb{R}$ intervallumot értjük, ahol $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergens minden $x \in I$ esetén.

Megjegyzés: Az I intervallum mindig egy az x_0 középpontra szimmetrikus tartomány, azaz $I = \Big(x_0 - r,\ x_0 + r\Big)$. Ezt az $r \in \mathbb{R}$ számot **konvergenciasugárnak** nevezzük.

$$K_r(x_0) := \Big\{x \in \mathbb{R} \ \Big|\ \big|x - x_0\big| < r\Big\}$$

Az r konvergenciasugarat a hányadoskritérium segítségével is megtalálhatjuk.
Ez esetben a konvergenciasugár a következőképp számolható ki:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad \text{(ha létezik)}$$

Példa: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n$ konvergenciasugara.

$$\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{3^n}{3 \cdot 3^n} = \frac{1}{3} = r$$

Mivel $x^n = (x-0)^n$ szerepel, ezért a hatványsor középpontja 0.

Meg kell vizsgálni a konvergenciát a végpontokban is.

Tétel (Cauchy-Hadamard): Tekintsük az $r := \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ értéket.

Amennyiben

1. $|x-x_0| < r \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *abszolút konvergens.*
2. $|x-x_0| > r \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor *divergens.*
3. $|x-x_0| = r$ (nem mondható semmi a konvergenciáról)

A konvergenciaintervallum végpontjaiban, vagyis $x = r$ és $x = -r$ helyeken külön meg kell vizsgálni, hogy a hatványsor konvergens-e vagy sem.

Tétel. A hatványsor összegfüggvénye $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ folytonos.

Tétel. Ha a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergenciasugara $r > 0$, és összeg-függvénye $f(x)$, akkor minden $x \in (-r, r)$-re fennáll, hogy $f(x)$ tetszőlegesen sokszor differenciálható és a deriváltak a következők:

$$f'(x) = \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} a_n n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\infty} \boldsymbol{(n+1)} \cdot a_{n+1}(x-x_0)^n$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{(n+k)} \cdot \boldsymbol{(n+k-1)} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{(n+1)} a_{n+k}(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k}(x-x_0)^n$$

Analitikus függvények

Az f függvény az x_0 pontban *analitikus*, ha x_0 egy környezetében konvergens hatványsor összegeként áll elő, azaz $\exists r > 0$, hogy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0), \qquad \big(x \in K_r(x_0)\big)$$

Az f függvény egy I intervallumon *analitikus*, ha az intervallum minden pontjában az.

Tétel (Hatványsor egyértelműsége): Ha f *analitikus* x_0-ban, azaz $\exists r > 0$, hogy $\forall x \in K_r(x_0)$ esetén

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0), \text{ akkor } a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Ez egyben azt is jelenti, hogy x_0-ban analitikus függvény egyértelműen fejthető x_0 középpontú hatványsorba, mégpedig

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x \in K_r(x_0)$$

Következmény. Minden hatványsor az összegfüggvényének Taylor sora.

Taylor-polinomok, Taylor-sorok

Legyen az f függvény értelmezési tartománya egy $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és x_0 az I belső pontja. Valamint legyen $t_n(x)$ olyan n-ed fokú polinom, hogy $t^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, ahol $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Ekkor az $f(x)$ függvény x_0 központú

- **Taylor-sora**:

$$T_{x_0}(f, x) := \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}_{a_n} \cdot (x - x_0)^k,$$

  ahol az $f \in D^{\infty}[x_0]$.

  Az $x_0 = 0$ középpontú speciális Taylor-sort *Maclaurin*-sornak nevezzük. Jelölése: $M(x)$.

- **n-ed fokú Taylor-polinomja**:

$$T_{x_0,n}(f, x) := t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k,$$

  ahol az $f \in D^{(n)}[x_0]$.

Maradéktagok

A függvény és az azt approximáló n-ed fokú Taylor-polinom különbségét megadó függvényt **maradéktagnak** nevezzük.

$$f(x) - t_n(x) = r_n(x)$$

Megjegyzés: A Taylor-sor és a függvény eltérése épp az r_n függvénysorozat határfüggvénye.

Lagrange-féle maradéktag: $\xi = x_0 + \alpha(x - x_0) \quad 0 < \alpha < 1$

$$r_n^{(L)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

A Lagrange-féle maradéktag alapján az approximációs hibára a következő korlát adódik:

Az $f^{(n+1)}(\xi)$ felülről becsülhető az (n+1)-edik derivált abszolútértékének maximumával.
Ez az érték legyen **M**.

Az $\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ pedig majorálható a $\dfrac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$-sal.

Tehát az n-ed fokú Taylor-polinom maximális eltérése az f függvénytől az x helyen:

$$\Big|r_n\Big| = \Big|f(x) - t_n(x)\Big| \leq M \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

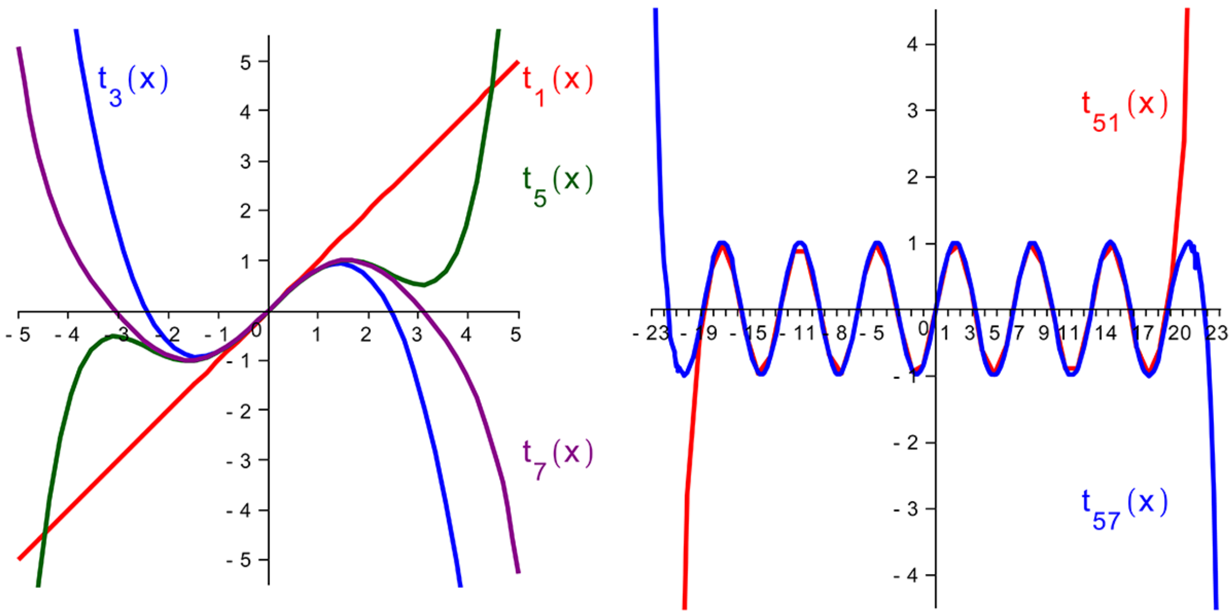
Következmény. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, akkor a $t_n(x)$ függvény konvergens, és $t_n(x) \to f(x)$, így a Taylor-sor előállítja az $f(x)$ függvényt.

Néhány ismert függvény Taylor-sora, azaz hatványsora

Ha egy függvény előáll egy hatványsor összegeként, akkor az csak a függvény Taylor-sora lehet, mert ha egy $f(x)$ függvény hatványsorba fejthető, akkor abból az következik, hogy akárhányszor differenciálható.
Továbbá a hatványsor n-edik együtthatója a_n a következő alakban áll elő:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Ez pedig a Taylor-sor definíciója szerint azt jelenti, hogy az $f(x)$ függvényt előállító hatványsor nem más, mint az $f(x)$ Taylor-sora.



1. ábra. Példa 1., 3., 5. és 7. és az 51. és 57. Taylor polinom.

e^x hatványsora és konvergencia tartománya

Írjuk fel a e^x deriváltjait:

$$(e^x)' = (e^x)'' = \ldots = (e^x)^{(n)} = e^x$$

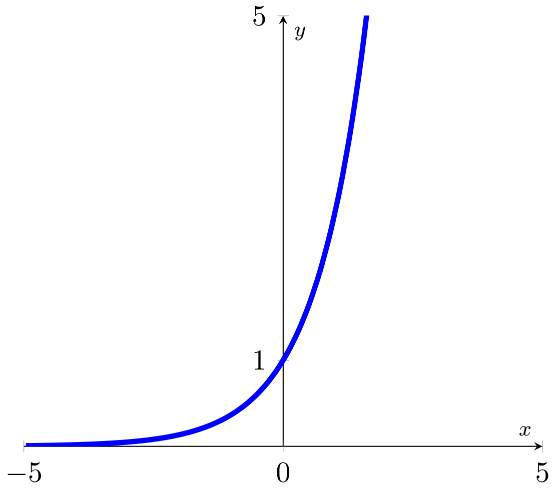
Ezeket behelyettesítve az $M(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$ képletbe

$$M(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Ezután azt kell megvizsgálni, hogy az így kapott sor konvergál-e az adott függvényhez. A Lagrange-féle maradéktag szerint az e^x függvény és a most kapott hatványsor eltérése egy rögzített x helyen:

$$r_n(x) \leq e^x \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

A rögzített x miatt e^x egy véges szám, az $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ pedig tart 0-hoz, amíg n tart végtelenhez. Ez bármely x valós szám esetén teljesül, tehát a hatványsor az egész számegyenesen konvergál az e^x függvényhez.



$\sin(x)$ **hatványsora és konvergencia tartománya**

Írjuk fel a $\sin x$ deriváltjait:

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\sin x)'' = -\sin x$$
$$(\sin x)''' = -\cos x$$
$$(\sin x)^{(4)} = \sin x$$
$$\dots$$

Ezeket behelyettesítve az $M(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$ képletbe

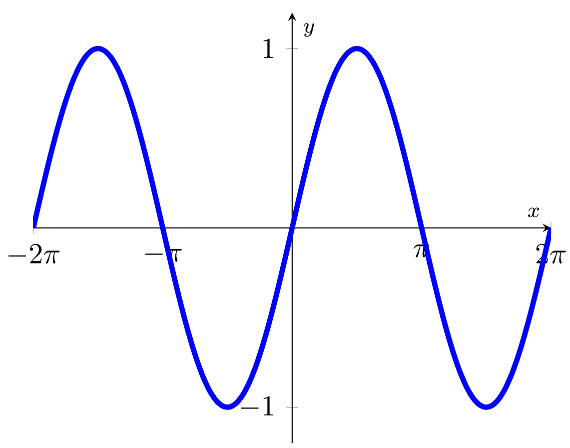
$$M(x) =$$
$$\frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} + \frac{f'''(0)}{3!} + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} + \frac{f^{(5)}(0)}{5!} + \dots =$$
$$\frac{\sin(0)}{0!} + \frac{\cos(0)}{1!} + \frac{-\sin(0)}{2!} + \frac{-\cos(0)}{3!} + \frac{\sin(0)}{4!} + \frac{\cos(0)}{5!} + \dots =$$
$$\frac{0}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots =$$
$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

A Lagrange-féle maradéktagból az approximációs hiba egy rögzített x esetén:

$$r_{2n+1}(x) \leq M \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$M = max\left\{\left|(sinx)^{(2n+1)}\right|\right\} = 1$. Így $r_n \to 0$, ha $n \to \infty$.

Tehát a $\boldsymbol{\sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.



$\cos(x)$ **hatványsora és konvergencia tartománya**

Írjuk fel a $\cos x$ deriváltjait:

$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\cos x)'' = -\cos x$$
$$(\cos x)''' = \sin x$$
$$(\cos x)^{(4)} = \cos x$$
$$\dots$$

Ezeket behelyettesítve az $M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$ képletbe

$$M(x) =$$
$$\frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} + \frac{f'''(0)}{3!} + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} + \frac{f^{(5)}(0)}{5!} + \dots =$$
$$\frac{\cos(0)}{0!} + \frac{-\sin(0)}{1!} + \frac{-\cos(0)}{2!} + \frac{\sin(0)}{3!} + \frac{\cos(0)}{4!} + \frac{-\sin(0)}{5!} + \dots =$$
$$\frac{1}{0!} + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + \frac{-1}{6!}x^6 + \dots =$$
$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

A Lagrange-féle maradéktagból az approximációs hiba egy rögzített x esetén:

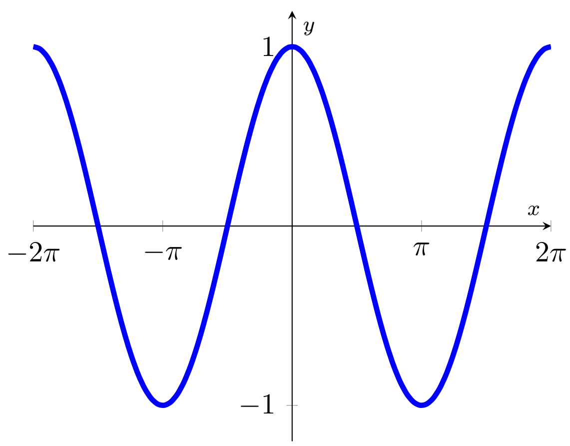
$$r_{2n}(x) \le M \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$M = max\left\{ \left| (cosx)^{(2n)} \right| \right\} = 1$. Így $r_n \to 0$, ha $n \to \infty$.

Tehát a $\boldsymbol{\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Más megközelítésben: $\cos x = (\sin x)'$. Így a $\cos x$ hatványsorához deriváljuk a $\sin x$ hatványsorát.

$$M(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)(2n)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$



$\sinh(x)$ $(sh(x))$ **hatványsora és konvergencia tartománya**

Írjuk fel a $\sinh x$ deriváltjait:

- $(\sinh x)^{(n)} = \cosh x$, ha n páratlan, tehát $(\sinh 0)^{(2n+1)} = 1$
- $(\sinh x)^{(n)} = \sinh x$, ha n páros, tehát $(\sinh 0)^{(2n)} = 0$

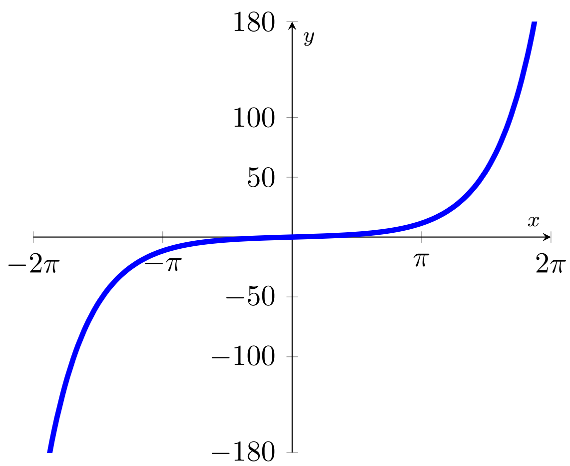
Így a hatványsor $\sinh x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

A Lagrange-féle maradéktagból az approximációs hiba egy rögzített x esetén:

$$r_{2n+1}(x) \leq M \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$M = max\left\{\left|(\sinh x)^{(2n)}\right|\right\} = \cosh x = const.$ Így $r_n \to 0$, ha $n \to \infty$.

Tehát a $\boldsymbol{\sinh(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.



$\cosh(x)$ $(ch(x))$ **hatványsora és konvergencia tartománya**

Írjuk fel a $\cosh x$ deriváltjait:

- $(\cosh x)^{(n)} = \sinh x$, ha n páratlan, tehát $(\cosh 0)^{(2n+1)} = 0$
- $(\cosh x)^{(n)} = \cosh x$, ha n páros, tehát $(\cosh 0)^{(2n)} = 1$

Így a hatványsor $\cosh x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

A Lagrange-féle maradéktagból az approximációs hiba egy rögzített x esetén:

$$r_{2n}(x) \leq M \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$M = max\left\{\left|(\sinh x)^{(2n)}\right|\right\} = \sinh x = const.$ Így $r_n \to 0$, ha $n \to \infty$.

Tehát a $\boldsymbol{\cosh(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.