2. Differenciál- integrálszámítás

Jacobi-mátrix, gradiens, parciális derivált

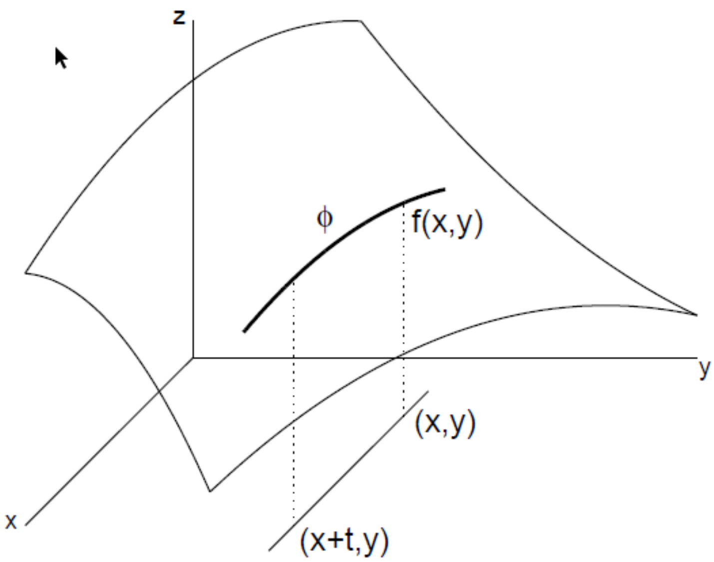
Parciális derivált

Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény. Tekintsük az értelmezési tartomány egy $a = (x, y) \in intD_f$ belső pontját. Fektessünk az a ponton az x tengellyel párhuzamos egyenest, ennek egy pontja

$$(x + t, y) \qquad t \in \mathbb{R}$$

lesz, majd vegyük a függvény értékeit ezekben a pontokban: $f(x + t, y)$.

Ekkor egy $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(t) := f(x + t, y)$ függvényt értelmeztünk, a képe egy, a felületen futó görbe (1. ábra).



1. ábra.

Azt mondjuk, hogy az f függvény az (x, y) pontban az első változó szerint parciálisan differenciálható, ha ϕ differenciálható a $t = 0$ pontban. Ha $\phi \in D[0]$, akkor az f első változó szerinti parciális deriváltja az (x, y) pontban legyen a $\phi'(0)$, azaz

$$\partial_1 f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t, y) - f(x, y)}{t}$$

lesz ez a parciális derivált.

Látható, hogy az első változó szerinti parciális deriválhatóság csak a felületi görbe simaságát jelenti a $t = 0$ pontban, és a $\boldsymbol{\partial_1 f(x, y)}$ *ennek a felületi görbének a meredekségét adja.* Az is leolvasható, hogy

$$\frac{f(x + t, y) - f(x, y)}{t} \approx \partial_1 f(x, y), \quad \text{ha } t \approx 0$$

ami úgy is olvasható, hogy csupán az első tengely irányába kimozdulva az (x, y) pontból

$$f(x + t, y) \approx f(x, y) + \partial_1 f(x, y) \cdot t, \quad \text{ha } t \approx 0$$

Az előzőeknek megfelelően, ha az (x, y) ponton át az y tengellyel párhuzamos egyenest veszünk fel, akkor is kapunk egy $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \psi := f(x, y + t)$ felületi görbét.

Ha $\psi \in D[0]$, akkor az f második változója szerint parciálisan differenciálható az (x, y) pontban, és

$$\partial_2 f(x, y) := \psi'(0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x, y + t) - f(x, y)}{t}$$

lesz az f második változó szerinti parciális deriváltja az (x, y) pontban. Az előzőkhez hasonló a $\partial_2 f(x, y)$ jelentése is.

Gyakran használják még a $\partial_1 f(x, y)$ helyett a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $f'_x(x, y)$ és a $D_1 f(x, y)$ jelöléseket is. Ennek megfelelően a $\partial_2 f(x, y)$ helyett használt jelölések is.

Megfigyelhető, hogy az f első változó szerinti parciális deriválhatóságánál a második koordináta, az y nem változik, állandó marad. Ez indokolja, hogy ha egy tetszőleges (x, y) pontban akarjuk például az

$$f(x, y) := x^2 y^3 + 2x + y \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény első változó szerinti parciális deriváltját kiszámítani az (x, y) pontban, akkor a deriválás során az y konstansnak számít, tehát

$$\partial_1 f(x, y) = 2xy^3 + 2 + 0 \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Ugyanígy a második változó szerinti parciális deriválás során x számít konstansnak tehát

$$\partial_2 f(x, y) = x^2 3y^2 + 1 \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Derivált mátrix

Most foglalkozzunk a differenciálhatóság fogalmának olyan kialakításával, amely valódi általánosítása a valós-valós függvény differenciálhatóságának.

Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \in int D_f$.
Azt mondjuk, hogy f ***differenciálható*** az (x, y) pontban, ha van olyan $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ és olyan $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, hogy minden olyan
$h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ vektorra, amelyre $(x + h_1, y + h_2) \in D_f$, teljesül, hogy

$$f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \alpha(h_1, h_2)$$

és

$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha(h)}{\|h\|} = 0$$

A $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\alpha(h)}{\|h\|} = 0$ az $\alpha(h)$ maradéktag "kicsiségére" utal. Nyilván $\displaystyle\lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0$ is igaz, de ha $\alpha(h)$ értékeit elosztjuk a $\|h\| \approx 0$ kicsi számmal, akkor ezzel "felnagyítjuk" az $\alpha(h)$ értékeit, így ha még ez a hányados is 0-hoz tart, akkor $\alpha(h)$ igazán "kicsi".

Amikor a $h := (h_1, 0)$ alakú, akkor átrendezés és határértékképzés után

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{f(x + h_1, y) - f(x, y)}{h_1} = \lim_{h_1 \to 0} \left(A_1 + \frac{\alpha(h_1, 0)}{|h_1|} \right) = A_1$$

amely azt jelenti, hogy ha f differenciálható az (x, y) pontban, akkor A_1 csak $\partial_1 f(x, y)$ lehet.

A $h := (0, h_2)$ alakú vektorokra pedig az adódnak, hogy A_2 csak $\partial_2 f(x,y)$ lehet. Így ha f differenciálható az (x,y) pontban, akkor a függvény $f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y)$ megváltozása jól közelíthető a

$$\partial_1 f(x,y)h_1 + \partial_2 f(x,y)h_2$$

"lineáris" függvénnyel, sőt az elkövetett hiba, az $\alpha(h_1, h_2)$ elhanyagolhatóan kicsi: még a felnagyított $\dfrac{\alpha(h)}{\|h\|}$ hányados is 0-hoz közeli, ha $\|h\|$ kicsi.

Differenciálhatóság $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Mátrixokat felhasználva az f differenciálhatósága azt jelenti, hogy van olyan $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) = \begin{bmatrix} \partial_1 f(x,y) & \partial_2 f(x,y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \alpha(h_1, h_2)$$

és

$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha(h)}{\|h\|} = 0$$

Az f differenciálhatóságát az $(x,y) \in intD_f$ pontban jelölje $f \in D[(x,y)]$, és az f deriváltja ebben a pontban

$$f'(x,y) := \begin{bmatrix} \partial_1 f(x,y) & \partial_2 f(x,y) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

Ha $f \in D[(x,y)]$, akkor $f \in \mathcal{C}[(x,y)]$.

Differenciálhatóság $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

A kétváltozós függvényre kialakított fogalmakat minden nehézség nélkül általánosíthatjuk a sokváltozós függvényekre is. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\right) \in intD_f$.

$$\partial_i f(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + t, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{t}$$

az f i-edik változó szerinti parciális deriváltja.

Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt az $x \in intD_f$ pontban *differenciálható*nak nevezzük, ha létezik olyan

$$A := \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

és létezik olyan $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény, hogy minden $h \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$f(x+h) - f(x) = Ah + \alpha(h), \text{ ahol } \lim_{h \to 0} \frac{\alpha(h)}{\|h\|} = 0$$

Itt is igaz, hogy $A_i = \partial_i f(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ha $f \in D[x]$, akkor

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \partial_1 f(x) & \partial_2 f(x) & \ldots & \partial_n f(x) \end{bmatrix}$$

Differenciálhatóság $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k,\ x \in \int D_f$. Az f függvény differenciálható az x pontban, ha létezik olyan $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$, és van olyan $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvény, hogy minden $h \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$f(x+h) - f(x) = Ah + \alpha(h),\ \text{ahol}\ \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(h)}{\|h\|} = 0$$

Most $A_{ij} = \partial_j f_i(x)$, és így

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_2 f_1(x) & \dots & \partial_n f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & \partial_2 f_2(x) & \dots & \partial_n f_2(x) \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_k(x) & \partial_2 f_k(x) & \dots & \partial_n f_k(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times n}$$

az f deriváltja az x pontban, ezért ***Jacobi-mátrix***nak is nevezik.

Grádiens

k = 1 esetén $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ az $f'(a) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ sormátrix helyett a $gradf(a) := \big(f'(a)\big)^T$ vektort használják, azaz

$$gradf(a) = \begin{bmatrix} \partial_1 f(a) \\ \partial_2 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{bmatrix}$$

Tehát ebben az esetben az $f'(a)$ Jacobi-mátrix tekinthető egy $\mathbb{R}^n$-beli vektornak, amit az f függvény a-beli ***gradiensének*** nevezünk.

Ha $D := \Big\{a \in D_f : f \in D[a]\Big\}$, akkor az

$$x \mapsto \mathrm{grad} f(x) \in \mathbb{R}^n \quad (x \in D)$$

függvényt az f függvény ***gradiens***ének nevezzük, és $\mathrm{grad} f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jelöljük.

Gradiens mint Jacobi-mátrix sora

Legyen $1 \le n, m \in \mathbb{N}$. Az $f = \big(f_1, \dots, f_m\big) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény akkor és csak akkor differenciálható az $a \in intD_f$ helyen, ha minden $i = 1, \dots, m$ esetén az $f_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ koordináta-függvény differenciálható az a-ban.

Ha $f \in D[a]$, akkor az $f'(a)$ Jacobi-mátrix a következő alakú:

$$f'(a) = \begin{bmatrix} \mathrm{grad} f_1(a) \\ \mathrm{grad} f_2(a) \\ \vdots \\ \mathrm{grad} f_m(a) \end{bmatrix}$$

Differenciálhatóság és parciális differenciálhatóság

- Differenciálhatóság $\Rightarrow$ parciális differenciálhatóság
  $1 \le n \in \mathbb{N},\ h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, és $h \in D[a]$ $(a \in D_h)$
  $\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n :$ a h függvény i-edik változó szerint parciálisan differenciálható az a pontban, és

$$\text{grad}h(a) = \big(\partial_1 h(a), \dots, \partial_n h(a)\big)$$

- Differenciálhatóság $\Leftarrow$ parciális differenciálhatóság

  Tétel. Ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és $\exists K(x) \subset D_f$, hogy

$$\forall i = 1, \dots, n \text{ és } \forall j = 1, \dots, k \text{ esetén } \partial_i f_j \in \mathcal{C}\big[K(x)\big] \Rightarrow f \in D[x]$$

Differenciálhatóság

A differenciálhatóság a függvény simaságát jelenti. A differenciálható függvény folytonos, és nincs rajta törés, csúcs. A derivált lényegében annak a mértéke, hogy egy egyváltozós valós függvény görbéjéhez rajzolt érintője milyen meredek.
A deriváltból következtethetünk a függvény

- menetére (azaz, hogy monoton növekvő vagy monoton fogyó-e),
- szélsőértékeire (lehet-e az adott pontban maximuma vagy minimuma),
- grafikonjának görbületére (konvex vagy konkáv-e a függvénygörbe)
- a növekedés mértékére (gyorsan változik-e a függvény vagy lassan)
- a függvény közelítő értékére, lineárissal történő közelíthetőségére.

Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R},\ a \in A$. Azt mondjuk, hogy a ***belső pontja*** az A halmaznak, ha $\exists K(a)$, hogy $K(a) \subset A$. Jelölése: $intD_f$

Példa:
$A = [0, 1]$, akkor $intA = (0, 1)$. $A = (5, 6]$, akkor $intA = (5, 6)$. $A = \{2, 3, 4\}$, akkor $intA = \emptyset$.

Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in int\mathcal{D}_f$ pontban ***differenciálható***, ha

$$\exists \text{ és véges a } \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ határérték.}$$

Ezt a határértéket az $f'(a)$ szimbólummal jelöljük, és az f függvény a pontbeli deriváltjának (vagy differenciálhányadosának) nevezzük, azaz

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \underset{(x=a+h)}{\equiv} \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L \in \mathbb{R}$$

Az $f'(a) = L \in \mathbb{R}$ számot az f függvény a pontbeli ***differenciálhányados***ának nevezzük.

Ha az f függvény differenciálható az a pontban, akkor ezt $f \in D[a]$ vagy $f \in D\{a\}$-val jelöljük.

Tétel. Ha $\boldsymbol{f \in D[a] \Rightarrow f \in C[a]}$. Fordítva nem igaz!

A tétel azt mondja ki, hogy az a pontbeli folytonosság a függvény a pontbeli differenciálhatóságának szükséges feltétele.

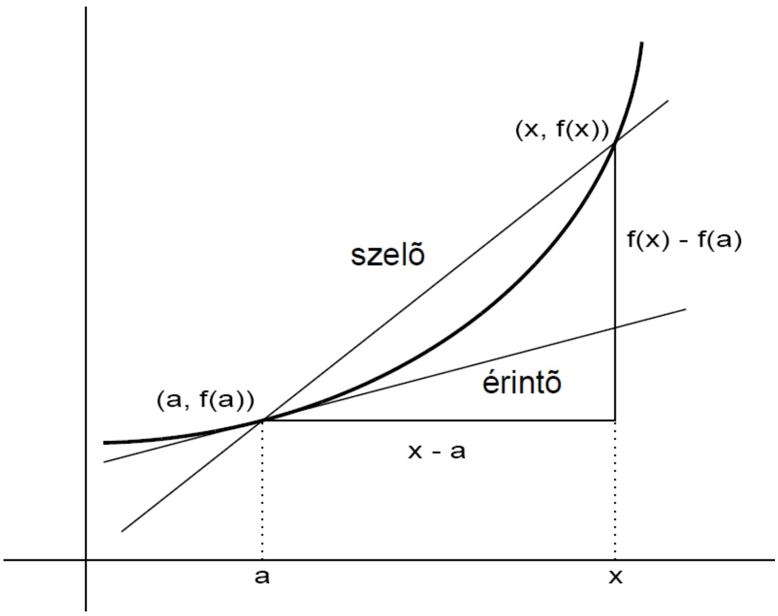
Elemi függvények deriváltja

$(e^x)' = e^x$	$f'(x) = 0 \ (x \in \mathbb{R})$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \text{ ha } n \in \mathbb{Z}^+$	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \text{ a } a > 0$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\sinh x)' = \cosh x$	$(\cosh x)' = \sinh x$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \text{ ha } x > 0$	$\log_a x = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ \big(x \in (0, +\infty)\big)$

Geometriai megközelítés: Legyen $f \in D[a]$. A koordináta rendszer $(a, f(a))$ és egy tőle különböző $(x, f(x))$ pontjain át húzunk egy egyenest (szelőt). Az egyenes meredeksége (iránytangense)

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} (= \Delta_f(a))$$

Ha x tart az a-hoz, akkor a szelők tartanak egy határértékhez, amit érintőnek neveznek, így a szelők meredeksége is tart az érintő meredekségéhez.



Definíció. *Érintő egyenes*: Ha az f függvény értelmezve az a pont egy környezetében és létezik és véges a

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

akkor az m meredekségű az $\big(a, f(a)\big)$ ponton átmenő egyenest az f függvény a pontbeli ***érintő***jének nevezzük. Az érintő egyenlete tehát

$$y = m \cdot (x - a) + f(a)$$

Deriválási szabályok

Legyen f és $g \in D[a]$, és $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges, ekkor

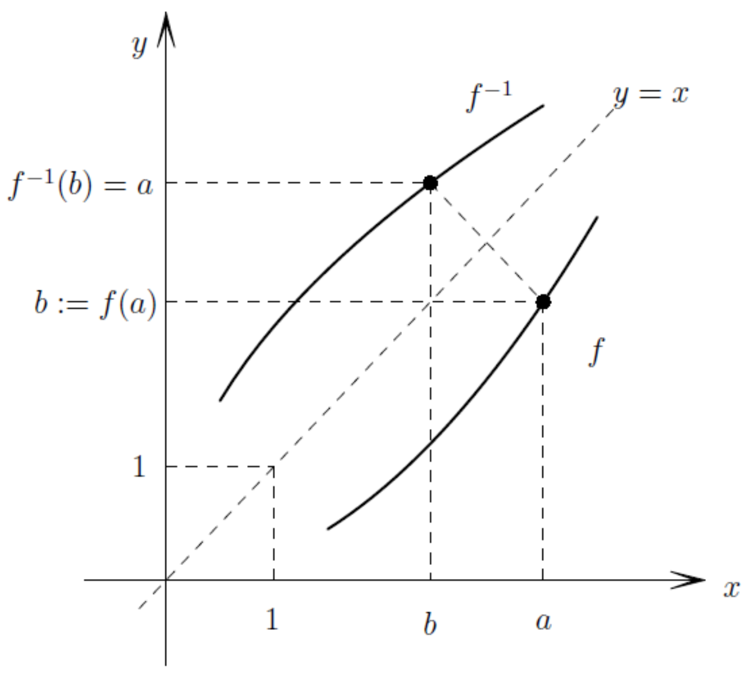
- $\lambda \cdot f \in D[a]$ és $(\lambda \cdot f)'(a) = \lambda \cdot f'(a)$
- $f + g \in D[a]$ és $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $f \cdot g \in D[a]$ és $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
- $\frac{1}{g(a)} \in D[a]$, ha $g(a) \neq 0$ és $(\frac{1}{g})'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$
- $\frac{f}{g} \in D[a]$ és $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)}{g^2}$, ha $g(a) \neq 0$

Definíció. (*Láncszabály*). Ha $g \in D[x]$ és $f \in D[g(x)]$, akkor az $f \circ g \in D[x]$ és

$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) \cdot g'(x) \Leftrightarrow f\big(g(x)\big)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

Definíció. (*Inverz függvény deriváltja*). Legyen $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ szigorúan monoton és folytonos függvény. Legyen $a \in I$, $f \in D[a]$, $f'(a) \neq 0$.
Ekkor $b := f(a)$ pontban $f^{-1} \in D[a]$ és

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)}$$



Szélsőérték, függvényvizsgálat

Szélsőérték

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathcal{D}_f$

- f-nek a-ban ***lokális maximuma*** van, ha alkalmas $r > 0$ mellett:

$$f(x) \leq f(a) \qquad (x \in K_r(a) \subset \mathcal{D}_f)$$

- f-nek a-ban ***lokális minimuma*** van, ha alkalmas $r > 0$ mellett:

$$f(x) \geq f(a) \qquad (x \in K_r(a) \subset \mathcal{D}_f)$$

- f-nek a-ban ***abszolút maximuma*** van, ha:

$$f(x) \leq f(a) \qquad (x \in \mathcal{D}_f)$$

- f-nek a-ban ***abszolút minumuma*** van, ha:

$$f(x) \geq f(a) \qquad (x \in \mathcal{D}_f)$$

Lokális szélsőérték

f-nek a-ban lokális szélsőértéke van, ha a-ban lokális minimuma vagy maximuma van.

Abszolút szélsőérték

f-nek a-ban abszolút szélsőértéke van, ha a-ban abszolút minimuma vagy maximuma van.

Elsőrendű szükséges feltétel (lokális szélsőértékre)

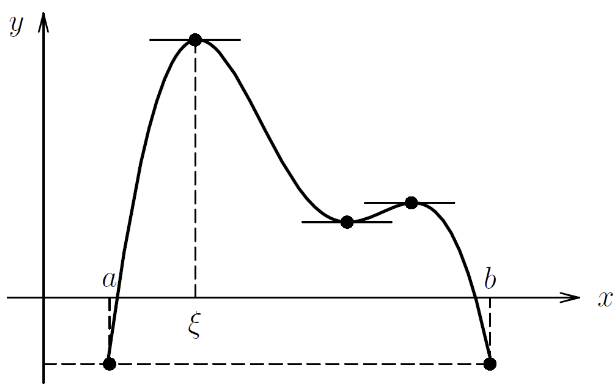
$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek $a \in int\mathcal{D}_f$ helyen lokális szélsőértéke van, és $f \in D[a]$
$\Rightarrow f'\{a\} = 0$
Az tétel segítségével már nem nehéz belátni a differenciálható függvények vizsgálata szempontjából alapvető fontosságú ún. középérték-tételeket

Rolle-tétel

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C[a, b]$, $f \in D[(a, b)]$, és $f(a) = f(b)$, ekkor

$$\exists\ \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0 \qquad (\xi\ (xi))$$

Szemléletesen: ha $f \in \mathcal{C}[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n, akkor f grafikonjának van olyan pontja, amelyben az érintő párhuzamos az x-tengellyel:

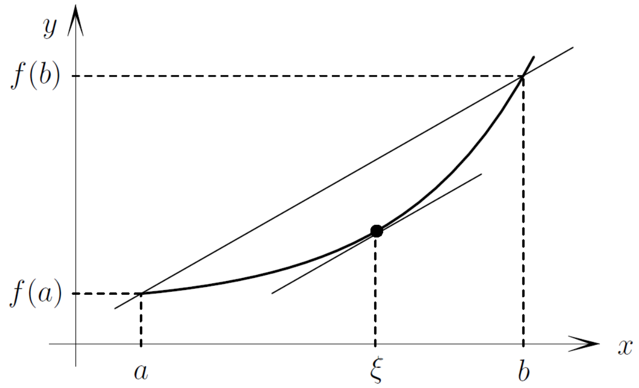


Lagrange-féle középértéktétel

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C[a, b]$, $f \in D[(a, b)]$, ekkor

$$\exists\ \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Szemléletesen: az f grafikonjának van olyan pontja, amelyben az érintő párhuzamos az $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ végpontokat összekötő szelővel.



2. ábra.

Cauchy-féle középértéktétel

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C[a, b]$, $f \in D[(a, b)]$, és $\forall x \in (a, b)$ esetén $g'(x) \neq 0$, ekkor

$$\exists\ \xi \in (a, b) : \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Elégséges feltétel a monotonitásra

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$, $f : [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \to \mathbb{R}$.
Tegyük fel, hogy $f \in C[a, b]$, $f \in D[(a, b)]$, ekkor

- ha $f' \geq \mathbf{0}$ $\quad (a, b)$-n $\Rightarrow f$ ***monoton növekedő*** $[a, b]$-n,
- ha $f' > \mathbf{0}$ $\quad (a, b)$-n $\Rightarrow f$ ***szigorúan monoton növekedő*** $[a, b]$-n,
- ha $f' \leq \mathbf{0}$ $\quad (a, b)$-n $\Rightarrow f$ ***monoton csökkenő*** $[a, b]$-n,
- ha $f' < \mathbf{0}$ $\quad (a, b)$-n $\Rightarrow f$ ***szigorúan monoton csökkenő*** $[a, b]$-n.

Szükséges és elégséges feltétel a monotonitásra

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$, $f : [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \to \mathbb{R}$.
Tegyük fel, hogy $f \in C[a, b]$, $f \in D[(a, b)]$, ekkor

- f ***monoton növekedő*** $[a, b]$-n $\Leftrightarrow f' \geq \mathbf{0}$ $\quad (a, b)$-n,
- f ***szigorúan monoton növekedő*** $[a, b]$-n $\Leftrightarrow f' \geq \mathbf{0}$ $\quad (a, b)$-n, és $[a, b]$-nek nincs olyan részintervalluma, ami azonosan nulla.
- f ***monoton csökkenő*** $[a, b]$-n $\Leftrightarrow f' \leq \mathbf{0}$ $\quad (a, b)$-n,
- f ***szigorúan monoton csökkenő*** $[a, b]$-n $\Leftrightarrow f' \leq \mathbf{0}$ $\quad (a, b)$-n, és $[a, b]$-nek nincs olyan részintervalluma, ami azonosan nulla.

Elégséges feltétel a lokális szélsőérték létezésére

Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ és $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.
Tegyük fel, hogy

- $f \in D[(a, b)]$,
- egy $c \in (a, b)$ pontban $f'(c) = 0$ és
- f' előjelet vált c-ben.

Ekkor ha

- f' függvény *negatívból pozitívba* $(- \longrightarrow +)$ megy át, akkor a c pont az f függvénynek ***lokális minimumhelye***,
- f' függvény *pozitívból negatívba* $(+ \longrightarrow -)$ megy át, akkor a c pont az f függvénynek ***lokális maximumhelye***.

Másodrendű elégséges feltétel a lokális szélsőérték létezésére

Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ és $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.
Tegyük fel, hogy

- $c \in (a, b)$ pontban $f \in D^2[c]$,
- $f'(c) = 0$,
- $f''(c) \neq 0$.

Ekkor c lokális szélsőértékhelye az f függvénynek, ha

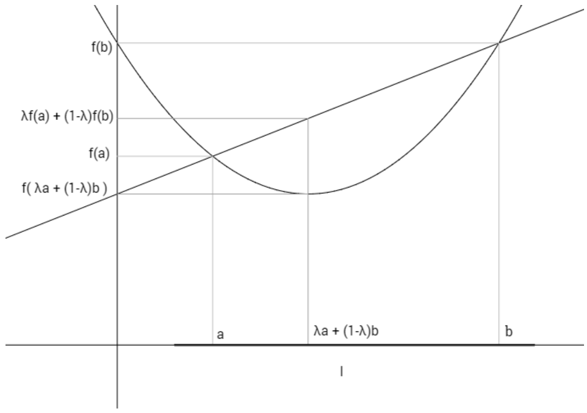
- $f''(c) > 0$, akkor f-nek c-ben ***lokális minimuma*** van,
- $f''(c) < 0$, akkor f-nek c-ben ***lokális maximuma*** van.

Konvex és konkáv függvények

Megjegyzés. Valós-valós függvények konvexitását és konkávitását intervallumon fogjuk értelmezni. Intervallumon mindig nem üres és nem egyetlen pontból álló $\mathbb{R}$-beli halmazt értünk.

Az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvény, és
$\forall a, b \in I,\ a < b$ és $\forall \lambda \in (0, 1)$ esetén

- f ***konvex*** *[szigorúan konvex]* $\Leftrightarrow$ $f\big(\lambda a + (1 - \lambda) b\big)\ \leq\ [<]\ \lambda f(a) + (1 - \lambda) b$
- f ***konkáv*** *[szigorúan konkáv]* $\Leftrightarrow$ $f\big(\lambda a + (1 - \lambda) b\big)\ \geq\ [>]\ \lambda f(a) + (1 - \lambda) b$
- f ***konvex*** *[szigorúan konvex]* $\Leftrightarrow$ $\forall c \in I$ esetén $f' \nearrow\ [\uparrow]$.
- f ***konkáv*** *[szigorúan konkáv]* $\Leftrightarrow$ $\forall c \in I$ esetén $f' \searrow\ [\downarrow]$.



3. ábra. Konvex függvény

Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha < \beta$, és tegyük fel, hogy $f \in D(\alpha, \beta)$, ekkor $\big(\forall x \in (\alpha, \beta)\big)$

- f ***konvex*** $\Leftrightarrow\ f''(x) \geq 0$.
- f ***konkáv*** $\Leftrightarrow\ f''(x) \leq 0$.
- $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ ***szigorúan konvex*** (α, β)-n.
- $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ ***szigorúan konvex*** (α, β)-n.

Többször differenciálható függvények

Az f függvény ***kétszer deriválható*** az a pontban, ha $\exists r > 0 : f \in D(K_r(a))$ és $f' \in D[a]$.
Ekkor a második derivált jele és definíciója:

$$f''(a) = (f')'(a) \qquad \text{(Jelölése: } f \in D^2[a])$$

Az f ***függvény*** n***-szer deriválható*** a***-ban***, ha $\exists r > 0 : f \in D^{(n-1)}(K_r(a))$ és $f^{(n-1)} \in D[a]$.
Ekkor a k-adik derivált jele és definíciója:

$$f^n(a) = (f^{(n-1)})'(a) \qquad \text{(Jelölése: } f \in D^n[a])$$

Riemann-integrál, parciális integrálás, integrálás helyettesítéssel.

Határozatlan integrál

Az integrálást lényegében a deriválás ,,inverz" műveleteként értelmezhetjük: egy adott függvény határozatlan integrálja minden olyan függvény, amelynek deriváltja az adott függvény.

Azt mondjuk, hogy a $F(x)$ függvény ***primitív függvénye*** az $f(x)$ függvénynek az (a, b) intervallumon, ha $F(x)$ deriválható (a, b)-ben és minden $x \in (a, b)$ esetén $F'(x) = f(x)$.
A primitív függvények összességét f határozatlan integráljának nevezzük.

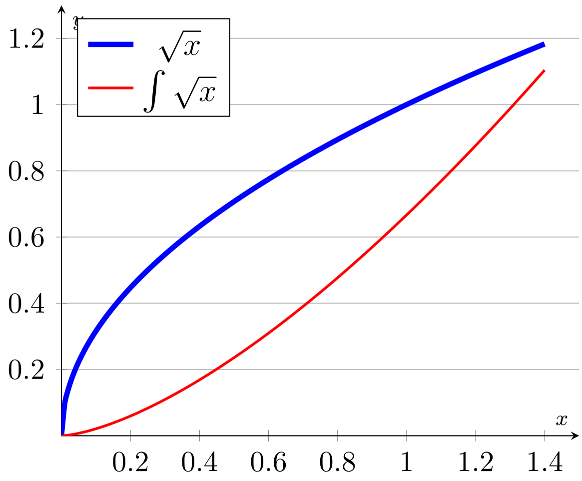
Az f függvény primitív függvényeinek összességét $\int f(x)$-szel vagy $\int f$-el illetve $\int f dx$-szel jelöljük és f ***határozatlan integráljának*** nevezzük. Tehát

$$\int f := \int f(x)dx := \Big\{F : I \to \mathbb{R},\ F \in D \text{ és } F' = f\Big\} \text{ (ez esetben } f \text{ neve: } \textbf{\textit{integrandus}})$$

Tétel. Ha F primitív függvénye f-nek, akkor az $F+c$ alakú függvények, ahol c tetszőleges konstans, az f függvény összes primitív függvénye, azaz

$$\int f = \left\{F + c : c \in \mathbb{R}\right\}$$

Például: $f(x) = \sqrt{x}$ függvény az egyik primitív függvénye.



Tétel. Folytonos függvénynek van primitív függvénye, pontosabban Ha $f(x)$ folytonos az $[a,b]$ zárt intervallumon, akkor van olyan $F(x)$ függvény, amelyik folytonos az $[a,b]$-n és primitív függvény (a,b)-n.

Alapintegrálok

Azokat az integrálokat, amelyek valamilyen elemi függvény deriválásának megfordításakor keletkeznek, elemi integráloknak nevezzük.

$$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ ahol } n \neq -1, \text{ speciálisan: } \int 1dx = x$$

$$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| \qquad \int x^\alpha\ dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1},\ \alpha \neq 1$$

$$\int a^x\ dx = \frac{1}{\ln a}a^x \ln a, \text{ ahol } a > 0,\ a \neq 1 \qquad \int e^x\ dx = e^x$$

$$\int \sin x\ dx = -\cos x \qquad \int \cos x\ dx = \sin x$$

Integrálási szabályok

Műveleti szabályok

- Összeget és különbséget lehet tagonként integrálni, tehát:

$$\int f = F, \int g = G \Longrightarrow \int [f \pm g] = F + G$$

- A konstansszorzó az integrál elé kiemelhető, azaz tetszőleges c esetén:

$$\int c \cdot f = c \int f$$

- *Lineáris helyettesítés.* $f(ax+b)$ alakú integrandus $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ és F egy primitív függvénye f-nek:
$$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a}$$
Példa:
$$\int \sin(3x-4)dx = \frac{-cos(3x-4)}{3}$$
- *Helyettesítés hatványfüggvénybe.* $f^{(n)}(x)f'(x)$ alakú integrandus: $(n \neq 1)$
$$\int f^{(n)}(x)f'(x)dx = \frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1}$$
Példa:
$$\int (2x^2+5)4x\ dx = \frac{(2x^2+5)^6}{6}$$
- $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ alakú integrandus:
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \begin{cases} \ln f(x): & I \subseteq \Big\{x : f(x) > 0\Big\} \\ \ln(-f(x)): & J \subseteq \Big\{x : f(x) < 0\Big\} \end{cases}$$
Megjegyzés: Itt I és J intervallum, a továbbiakban a fenti értelemben használjuk az $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\Big|f(x)\Big|$ jelölést.
Például:
$$\int \frac{2^x}{2^x-3}dx = \frac{1}{\ln 2}\ln\Big|2^x-3\Big|$$

Határozott integrál

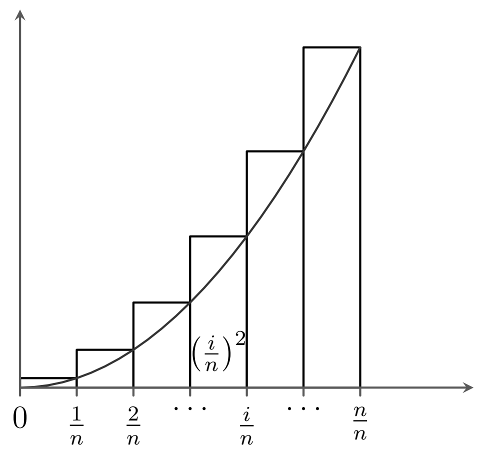
A gyakorlati életben, amikor konkrét integrálok kiszámítására van szükségünk, főként határozott integrálokat számolunk. Néhány, a határozott integrál fogalmára vezető probléma.

- A függvénygrafikon alatti terület.
- A munka értelmezése és kiszámítása.
- A nyomóerő meghatározása.

Riemann-integrál

Ismert, hogy az $u > 0$, $v > 0$ oldalú téglalap területe $u \cdot v$. Állapodjunk meg abban, hogy ha $u > 0$ és $v < 0$, akkor $u \cdot v$ a téglalap „előjeles területe” legyen.
Nézzük meg mi is az, hogy a
$$H := \Big\{(x, y) \mid x \in [0, 1], y \in [0, x^2]\Big\}$$
„parabola alatti tartománynak” mi lehet a területe.
Osszuk fel a $[0, 1]$ intervallumot n egyenlő részre. Az osztópontok
$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{2}{n},\ \dots,\ x_n = \frac{n}{n}.$$

Legyen $S_n := \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n}\right)^n$, azaz olyan téglalapok területének az összege, amelyeknek az alapja $\frac{1}{n}$, a magassága pedig az id^2 függvény osztópontokban vett függvényértéke (4. ábra).



4. ábra.

S_n egy „lépcsősidom” területe. Ha növeljük az n osztópontszámot, akkor a lépcsősidomok egyre jobban illeszkednek a H halmazhoz, így elvárható, hogy az (S_n) sorozat határértéke éppen a H halmaz területe legyen. Felhasználva, hogy minden $k \in N$ esetén $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$,

$$\lim S_n = \lim \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = \lim \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$
$$\lim \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \lim \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6} = \frac{1}{3}$$

Legyen tehát a H halmaz területe $\frac{1}{3}$.

Ezt a gondolatmenetet általánosítjuk. ◁ 💡

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény. Legyen

$$\tau := x_0, x_1, x_2, \ldots, , x_i, \ldots, x_n \subset [a, b],$$

ahol

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$$

az $[a, b]$ intervallum egy felosztása.

Minden $[x_i - 1, x_i]$ intervallumban vegyük fel egy ξ_i pontot (i=1,2,...,n).

Készítsük el az f függvény τ felosztáshoz tartozó közelítő összegét:

$$\sigma(\tau) := f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

(Ez a $\sigma(\tau)$ felel meg a bevezető példa S_n lépcsősidom területének, ott a ξ_i pontot mindig az intervallum jobb szélén vettük fel.)
Akkor mondjuk a függvényt integrálhatónak, ha a $\sigma(\tau)$ közelítő összegek „finomodó” felosztások során tetszőlegesen közel kerülnek egy számhoz. Pontosabban:

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény integrálható az $[a, b]$ intervallumon, ha van olyan $I \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $\delta > 0$, hogy az $[a, b]$ intervallum minden olyan τ felosztására, amelyben

$$\max\left\{x_i - x_{i-1}\middle| i = 1, 2, \dots, n\right\} < \delta$$

és a τ felosztáshoz tartozó $[x_{i-1},\ x_i]$ intervallumokban vett tetszőleges $\xi_i \in [x_{i-1},\ x_i]$ pontok esetén a

$$\sigma(\tau) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

közelítő összegre

$$\left|\sigma(\tau) - I\right| < \varepsilon$$

Ha f integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor ezt $f \in R[a, b]$ jelölje (Riemann tiszteletére, aki az integrált ilyen módon bevezette), és legyen

$$\int_a^b f := I.$$

(„integrál a-tól b-ig"). Továbbá ekkor azt mondjuk, hogy a

$$H := \left\{(x, y) \;\middle|\; x \in [a, b], \quad \begin{array}{ll} y \in [0, f(x)], \text{ ha} & f(x) \geq 0 \\ y \in [f(x), 0], \text{ ha} & f(x) < 0 \end{array}\right\}$$

halmaznak („görbe alatti tartomány") van előjeles területe, és ez a terület az $I \in \mathbb{R}$ szám. Röviden úgy szoktak hivatkozni erre a fogalomra, hogy bevezetve a $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ jelölést,

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} f(\xi_i)\Delta x_i = I$$

vagy

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum f(\xi)\Delta x = \int_a^b f(x)dx.$$

▷ Könnyű látni, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ egy konstans függvény, akkor

$$\lim_{x_i \to 0} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c(b - a),$$

amint ezt a szemlélet alapján is vártuk, tehát $f \in R[a, b]$ és $\int_a^b f = c(b - a)$. ◁

Az integrálhatóság feltételei

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos és τ egy felosztása $[a, b]$-nek. Az

$$\omega(f, \tau) = S(f, \tau) - s(f, \tau)$$

valós számot az f függvény τ-hoz tartozó ***oszcillációs összeg***ének nevezzük.

Riemann-kritérium: Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható, ha $\forall\varepsilon > 0$ számhoz $\exists\tau$ felosztása $[a, b]$-nek úgy, hogy $\omega(f, \tau) < \varepsilon$.

Tétel. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f Riemann-integrálható ($f \in R[a, b]$).

Tétel. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton függvény, akkor f Riemann-integrálható ($f \in R[a, b]$).

A Riemann-integrál és a műveletek kapcsolata

Ha $f \in \mathcal{C}[a,b]$, akkor $f \in R[a,b]$. Ha $f \in R[a,b]$ és $f \in R[b,c]$, akkor $f \in R[a,c]$, sőt

$$\int\limits_a^b f + \int\limits_b^c f = \int\limits_a^c f$$

Tehát az integrálási intervallum részekre bontásával az eredeti integrál a részeken vett integrálok összegével egyezik meg.

Ha $f \in R[a,b]$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda \in R[a,b]$, és

$$\int\limits_a^b \lambda f = \lambda \int\limits_a^b f$$

Ha $f, g \in R[a,b]$, akkor $f + g \in R[a,b]$, és

$$\int\limits_a^b (f+g) = \int\limits_a^b f + \int\limits_a^b g$$

Ha $f, g \in R[a,b]$, akkor $f \cdot g \in R[a,b]$. Nincs rá általános képlet.

Ha $f, g \in R[a,b]$, és $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, akkor

$$\int\limits_a^b f \geq \int\limits_a^b g$$

Ha $f \in R[a,b]$, akkor

$$\left| \int\limits_a^b f \right| \leq \int\limits_a^b |f|$$

A határok felcserélésével előjelváltás történik.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Newton-Leibniz-formula

A határozott és a határozatlan integrál kapcsolatát a Newton-Leibniz formula adja meg: Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrálható és $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény úgy, hogy $\forall x \in (a,b)$-re az F differenciálható x-ben és $F'(x) = f(x)$. Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx := F(b) - F(a)$$

Jelölés: $F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$. Így tehát a határozott integrál kiszámolásához is lényegében primitív függvényt kell keresnünk, ezért a határozatlan integrál esetében látott szabályok és módszerek itt is érvényben maradnak.

Parciális intergrálás

A parciális integrálás egy igen fontos módszer, mert segítségével szorzat alakban megadott (vagy olyanná alakítható) integrandusok nagyrészét kiszámíthatjuk. Maga a módszer a szorzat függvény deriválási szabályából adódik:

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Az ötlet tehát, hogy a szorzat alakban megadott függvény egyik tényezőjét f-nek, másik tényezőjét g'-nek választva átírjuk az integrált. A megfelelő megválasztás alapja, hogy $f'g$-t könnyebben lehet integrálni mint fg'-t.
Nem mindegy azonban, hogy melyik függvényt választjuk f-nek, illetve g-nek.

Parciális integrálás határozott esetben

Legyen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények az $[a, b]$ intervallumon differenciálhatók, és deriváltfüggvényük is folytonos.
Ekkor az $f \cdot g' + f' \cdot g$ is folytonos, és $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$-t figyelembe véve a Newton-Leibniz-formula alapján

$$\int\limits_a^b \Big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\Big)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\int\limits_a^b f'(x)g(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b f(x)g'(x)dx$$

Természetesen ezt akkor tudjuk alkalmazni, ha a jobb oldalon álló integrál kiszámolható.

Helyettesítéses integrálás

A helyettesítéses integrálás módszere nagyon sokszor segítségünkre lehet a legkülönfélébb estekben is. Lényege, hogy az integrandusban valamilyen kifejezést helyettesítünk egy új változóval, ez által egy könnyebben integrálható kifejezést kapunk, amit kiintegrálunk, majd a végén visszahelyettesítjük az eredeti kifejezést.

Az eljárás lényege tehát a következő: Legyen $g(x) = t$, ekkor $g'(x) = \frac{dt}{dx}$, és ezért $g'(x)dx = dt$, vagyis:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) = F(g(x))$$

Példa:

$$\int \frac{3}{\cos^2(2x-3)}dx = \int \frac{3}{\cos^2 t}\frac{dt}{2} = \frac{3}{2}\tan t = \frac{3}{2}\tan(2x-3)$$

Harározott esetben

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt = [F(t)]_{g(a)}^{g(b)}$$

Példa: Határozzuk meg az egység sugarú (negyed-)kör területét.
Az origó középpontú 1 sugarú kör egyenlete: $x^2 + y^2 = 1$, ezért az első síknegyedet választva az explicit függvénykapcsolatot az $y = \sqrt{1 - x^2}$ képlet írja le. A meghatározandó integrál tehát: $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$.
Alkalmazzuk az $x = \sin y$ helyettesítést $\Rightarrow dy = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dx$

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \sin^2(y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(y)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos(2y)dy = \frac{1}{2}\left[y + \frac{\sin(2y)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Integrálszámítás alkalmazása

- Függvények alatti terület kiszámítása
- Síkidomok területének kiszámítása
- Forgástestek felszínének kiszámítása
- R^n-beli görbék ívhosszának kiszámítása

Lineáris, ill. magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek

Az olyan egyenleteket, melyben az ismeretlen függvény deriváltja, illetve deriváltjai szerepelnek, differenciál-egyenleteknek nevezzük. Tehát egy differenciálegyenletben szerepelhetnek:

- konstansok;
- egy vagy több független változó;
- az ismeretlen függvény, illetve függvények közönséges, illetve parciális deriváltja, illetve deriváltjai.

Differenciálegyenletek osztályozása

Ha a differenciálegyenletben egyetlen független változó van, akkor a derivált közönséges derivált. Ebben az esetben ***közönséges differenciálegyenlet***ről beszélünk.

Ha a differenciálegyenletben kettő vagy több független változó van, akkor a derivált parciális derivált. Ekkor a szóban forgó egyenlet egy ***parciális differenciálegyenlet***.

Ha az ismeretlen függvények száma egynél több, akkor az ismeretlen függvények számával egyenlő számú differenciálegyenletből álló ***differenciálegyenlet-rendszer***rel van dolgunk.

A ***differenciálegyenlet rendje*** az egyenletben szereplő legmagasabb rendű derivált rangjával egyenlő.

A közönséges differenciálegyenletek közül azokat, amelyekben az ismeretlen függvény és ennek a deriváltjai legfeljebb csak első hatványon fordulnak elő és szorzatuk nem szerepel, ***lineáris differenciálegyenlet***nek nevezzük. Ellenkező esetben ***nemlineáris differenciálegyenlet***ekről beszélünk.

Ha a közönséges differenciálegyenletben van olyan tag, amely állandó, vagy amelyben csak a független változó szerepel, akkor a differenciálegyenlet ***inhomogén differenciálegyenlet***. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a differenciálegyenlet ***homogén differenciálegyenlet***.

Ha a közönséges differenciálegyenletben a függvényt és a deriváltjait tartalmazó tagok állandók, akkor az egyenletet ***állandó együtthatós differenciálegyenlet***nek nevezzük. Ellenkező esetben ***függvényegyütthatós differenciálegyenlet***ről beszélünk.

Egy f függvényt a ***differenciálegyenlet megoldásának*** nevezünk, ha deriváltjaival együtt azonosan kielégíti a differenciál-egyenletet.

Egy f függvényt az n-edrendű differenciálegyenlet ***általános megoldásának*** nevezünk, ha deriváltjaival együtt azonosan kielégíti a differenciálegyenletet és pontosan n db egymástól függetlenül megválasztható szabad paramétert tartalmaz.

Egy f függvényt az n-edrendű differenciálegyenlet ***partikuláris megoldásának*** nevezünk, ha deriváltjaival együtt azonosan kielégíti a differenciálegyenletet és legfeljebb $n-1$ db egymástól függetlenül megválasztható szabad paramétert tartalmaz.

Megjegyzés: A szabad paraméterek helyébe egy-egy (valós) számot helyettesítve a differenciálegyenlet valamely megoldását kapjuk.

Adott egy $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ tartomány és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény.

Keresünk: $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumot és $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ differenciálható függvényt, amelyre

- $(t, \varphi(t)) \in D \qquad (\forall t \in I)$
- $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \qquad (\forall t \in I)$

Ezt a feladatot explicit ***elsőrendő közönséges differenciálegyenletnek*** nevezzük.

Jelölése:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad \text{vagy} \qquad x' = f \circ (id, x) \tag{1}$$

Ha ilyen I intervallum és φ függvény létezik, akkor azt mondjuk, hogy a φ az (1) ***differenciálegyenlet megoldása*** I-n.

Kezdetiérték probléma

Legyen $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ tartomány és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, $(p_1, p_2) \in D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ pedig tetszőleges pont. A $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ differenciálható függvény az

$$x' = f(t, x(t)), \qquad x(p_1) = p_2 \tag{2}$$

kezdetiérték-probléma egy megoldása, ha

- φ az $x' = f(t, x(t))$ differenciálegyenlet egy megoldása I-n,
- $p_1 \in I$
- $\varphi(p_1) = p_2$

Továbbiakban kezdetiérték-probléma = K.É.P.

Kezdeti érték megoldására vonatkozó kérdések

1. A megoldás létezése
2. A megoldások egyértelműsége
3. A megoldások előállítása
   - pontos megoldás (megoldóképlet)
   - közelítő megoldás
4. A megoldások függése (például) a kezdeti értéktől
5. Minőségi vizsgálatok: A megoldások bizonyos tulajdonságainak (például periodicitás) vizsgálata a differenciálegyenlet ismerete nélkül

A megoldás létezése

Tétel. (Cauchy-Peano-féle egzisztenciatétel): Tegyük fel, hogy a $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ tartományon értelmezett és $f : D \to \mathbb{R}^n$ függvény folytonos. Ekkor bármely $(p_1, p_2) \in D$ esetén az

$$x' = f(t, x(t)), \qquad x(p_1) = p_2$$

kezdetiérték problémának van megoldása.

A megoldások egyértelműsége

A K.É.P globálisan ***egyértelműen oldható meg***, ha létezik olyan $\tilde{I} \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és olyan $\tilde{\varphi} : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ megoldása a kezdetiérték-problémának, hogy annak bármely más megoldása $\tilde{\varphi}$ egy leszűkítése. Ebben az esetben a $\tilde{\varphi}$ függvény a kezdetiérték-probléma ***teljes megoldásának*** nevezzük.

A K.É.P egy $\varphi^* : I^* \to \mathbb{R}^n$ megoldás ***maximális megoldás***, ha nincs olyan φ^*-től különböző megoldás, amelyiknek a leszűkítése φ^* lenne. Ha φ teljes megoldás $\Rightarrow$ ϖ maximális megoldás is. (fordítva nem igaz).

Az K.É.P ***lokálisan egyértelműen oldható meg***, ha a $(p_1, p_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ pontnak létezik olyan $k(p_1, p_2) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ környezete, hogy az f függvényt erre leszűkítve a megfelelő K.É.P megoldása már globálisan egyértelmű.

Tétel. Ha K.É.P minden $(p_1, p_2) \in D$ esetén lokálisan egyértelműen oldható meg, akkor minden K.É.P megoldása globálisan egyértelmű is.

Tétel. (*Picard–Lindelöf-féle egzisztencia- és unicitástétel*): Legyen $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ egy tartomány és $(p_1, p_2) \in D$. Tegyük fel, hogy

- az $f : D \to \mathbb{R}^n$ függvény folytonos D-n
- az f függvény a (p_1, p_2) pontban a második változójában lokális Lipschitz-feltételeknek tesz eleget, azaz

$$\exists k(p_1, p_2) \subset D \qquad \text{és} \qquad L_{(p_1,p_2)} > 0, \text{ hogy}$$
$$\|f(t, \overline{u}) - f(t, \overline{\overline{u}})\| \leq L_{(p_1,p_2)} \|\overline{u} - \overline{\overline{u}}\| \qquad (\forall (t, \overline{u}),\ (t, \overline{\overline{u}}) \in k(p_1, p_2))$$

Ekkor a K.É.P létezik megoldása és az lokálisan (sőt globálisan) egyértelmű.

Szétválasztható változójú (szeparábilis) differenciálegyenletek

Tegyük fel, hogy $I, J \in \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $\Omega := I \times J$ és

$$g : I \to \mathbb{R}, \quad h : J \to \mathbb{R}$$

folytonos függvények. Ekkor az

$$x'(t) = g(t)h(x(t)) \qquad \text{vagy} \qquad x' = g \cdot h \circ x \tag{3}$$

feladatot ***szétválasztható változójú*** (vagy ***szeparábilis***) differenciálegyenletnek nevezzük.

Ha $(p_1, p_2) \in I \times J$, akkor az

$$x' = g(t)h(x(t)), \qquad x(p_1) = p_2 \tag{4}$$

feladat a (3) egyenletre vonatkozó ***kezdetiérték-probléma***.

Megjegyzés: Az elnevezés onnan ered, hogy az ilyen differenciálegyenletek átrendezhetők úgy, hogy az y változó csak az egyik, az x változó pedig csak a másik oldalon forduljon elő.

Példa:

$y' = \dfrac{x^2 + x}{2y} \Rightarrow y1 = (x^2 + x) \cdot \dfrac{1}{2y}$.
$y'x + y' - y^2 + 2y = 0 \Rightarrow (y^2 - 2y) \cdot \dfrac{1}{x + 1}$.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Tegyük fel, hogy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f, g : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Ekkor az

$$x'(t) + f(t)x(t) = g(t) \qquad (t \in I) \tag{5}$$

feladatot elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük.

Ha $(p_1, p_2) \in I \times \mathbb{R}$, akkor az

$$x'(t) + f(t)x(t) = g(t), \qquad x(p_1) = p2 \qquad (t \in I)$$

feladat az (5) egyenletre vonatkozó ***kezdetiérték-probléma***.

A feladat megoldása homogén-inhomogén módszerrel

Tekintsük először az

$$x' + fx = 0 \tag{6}$$

homogén lineáris differenciálegyenletet, amelynek általános megoldása

$$\varphi(t) = c \cdot e^{-\int\limits_a^t f(s)ds} = c \cdot \varphi_0(t) \qquad (t \in I)$$

alakú, ahol $a \in I$ rögzített pont és c tetszőleges valós szám.

Az

$$x' + fx = g \tag{7}$$

inhomogén egyenletre a következő teljesül: ha ψ_1 és ψ_2 (7) megoldásai, akkor a $\psi := \psi_1 - \psi_2$ függvény kielégíti a (6) egyenletet.

Ebből következik, hogy ha ismerjük az inhomogén egyenlet egy ψ_p (partikuláris) megoldását, akkor (7) tetszőleges megoldása

$$\psi = \varphi + \psi_p$$

alakú, ahol φ homogén egyenlet egy megoldása.

Az előbbi megoldás a következő formában egyszerűbben megjegyezhető:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{inhomogén egyenlet}\\ \text{általános megoldása}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{homogén egyenlet}\\ \text{általános megoldása}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{az inhomogén egyenlet}\\ \text{egy partikuláris megoldása}\end{array}}$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását a Lagrange-tól eredő állandók variálásának a módszerével határozzuk meg.

Tegyük fel, hogy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum $f, g : I \in \mathbb{R}$ folytonos függvények és $(p1_, p_2) \in I \times \mathbb{R}$. Ekkor az

$$x' + fx = g, \qquad x(p_1) = p_2$$

kezdetiérték probléma globálisan egyértelműen oldható meg. A ψ teljes megoldás értelmezési tartománya az egész I intervallum, és a teljes megoldás

$$\psi(t) = \xi \cdot \varphi_0(t) + \varphi_0(t) \int\limits_{p_1}^{t} (\varphi_0(s))^{-1} g(s) ds \qquad (t \in I)$$

(ez a Cauchy-féle formula), ahol

$$\varphi_0(t) := e^{\int_{p_1}^{4} f(s)ds} \qquad (t \in I)$$

a homogén egyenlet egy megoldása.

Az $x' + fx = g$ inhomogén egyenlet megoldásai a

$$\psi(t) = c\varphi_0(t) + \psi_{part}(t) = c\varphi_0(t) + \varphi_0(t) \int_{p_1}^{t} (\varphi_0(s))g(s)ds \qquad (t \in I,\ c \in \mathbb{R})$$

függvények, illetve ezek leszűkítései.

Tétel. (*Szuperpozíció elve*): Tegyük fel, hogy ψ_1 megoldása az

$$x' + fx = g_1$$

egyenletnek, ψ_2 pedig megoldása az

$$x' + fx = g_2$$

egyenletnek, akkor $\psi_1 + \psi_2$ megoldása az

$$x' + fx = g_1 + g_2$$

egyenletnek.

n-ed rendű lineáris differenciálegyenletek

Legyen $n \in \mathbb{N},\ I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és tegyük fel, hogy az $a_i : I \to \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ és a $b : I \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak. Ekkor az

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1x' + a_0x = b$$

feladatot ***n*-edrendű lineáris differenciálegyenletnek** nevezzük. Ha $b \equiv 0$, akkor az egyenlet ***homogén***, az ellenkező esetben ***inhomogén***. ***Állandó együtthatós*** az egyenlet, ha az a_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ együtthatók valós számok.

Legyen $n \in \mathbb{R},\ I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és tegyük fel, hogy az

$$a_i : I \to \mathbb{R} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \text{ és a } b : I \to \mathbb{R}$$

függvények folytonosak. Ha $p \in I$ és $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1} \in \mathbb{R}$, akkor az

$$\begin{gathered} x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1x' + a_0x = b \\ x(p) = s_0, \quad x'(p) = s_1,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(p) = s_{n-1} \end{gathered}$$

feladatot az n-edrendű lineáris differenciálegyenletre vonatkozó ***kezdetiérték-problémának*** nevezzük.

A megoldások létezése és egyértelműsége. Az n-edrendű lineáris differenciálegyenletre vonatkozó tetszőleges kezdetiérték-probléma globálisan egyértelműen oldható meg, és minden teljes megoldás értelmezési tartománya az egész I intervallum.

A megoldáshalmaz szerkezet

- A homogén n-endrendű lineáris differenciálegyenlet teljes megoldásainak az $\mathcal{M}_h$ halmaza n-dimenziós lineáris tér $\mathbb{R}$ felett.
- Legyen ψ_p az ***inhomogén*** n-edrendű lineáris differenciálegyenlet egy (partikuláris) megoldása. Ekkor az egyenlet tetszőleges megoldása

  $$\psi = \varphi + \psi_{part}$$

  alakú, ahol φ a homogén egyenlet egy megoldása.

A homogén egyenlet $\mathcal{M}_h$ megoldáshalmazának egy bázisát a homogén egyenlet egy ***alaprendszerének*** nevezzük.

1. megjegyzés: A fenti megoldás a következő formában egyszerűbben megjegyezhető:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{inhomogén egyenlet}\\ \text{általános megoldása}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{homogén egyenlet}\\ \text{általános megoldása}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{az inhomogén egyenlet}\\ \text{egy partikuláris megoldása}\end{array}}$$

2. megjegyzés: Inhomogén egyenlet megoldásának előállításához tehát ismernünk kell
   - a homogén egyenlet egy alaprendszerét és
   - az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását.

Az állandók variálásának a módszerével a homogén egyenlet alaprendszerének (n lineárisan független megoldásának) az ismeretében egy partikuláris megoldás már előállítható.

Ez az jelenti, hogy inhomogén egyenlet megoldásához elegendő a homogén egyenlet egy alaprendszerét meghatározni. Az alaprendszer előállítására azonban csak az állandó együtthatós egyenletek esetében van általános módszer.

Az állandók variálásának a módszere: Tekintsük az

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = b(t) \qquad (t \in I)$$

inhomogén egyenletet, valamint a neki megfelelő

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = 0 \qquad (t \in I)$$

homogén egyenletet.
Legyen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ a homogén egyenlet egy alaprendszere. Ekkor az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása előállítható a

$$\psi_p(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + \ldots + c_n(t)\varphi_n(t) \qquad (t \in I)$$

alakban, ahol a $c'(t) := (c_1'(t), \ldots, c_n'(t))^T$ függvénynek a következő lineáris algebrai egyenletrendszer a megoldásai

$$\Phi(t) \cdot c'(t) = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{matrix} \qquad (t \in I) \tag{8}$$

ahol

$$\Phi(t) := \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \vdots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{n-1}(t) & \dots & \varphi_n^{n-1}(t) \end{bmatrix} \qquad (t \in I)$$

a Wronski-féle mátrix.

Megjegyzés: A ψ_p partikuláris megoldás előállításához tehát először meg kell oldani a (8) lineáris algebrai egyenletrendszert a $c_1'(t), \dots, c_n'$ ismeretlen függvényekre, amelyekből már integrálással előállíthatók a számukra szükséges $c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ függvények.

Tétel. (*Szuperpozíció elve*): Tegyük fel, hogy ψ_1 megoldása az

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = b_1$$

egyenletnek, ψ_2 pedig megoldása az

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = b_2$$

egyenletnek, akkor $\psi_1 + \psi_2$ megoldása az

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = b_1 + b_2$$

egyenletnek.

Az állandó együtthatós n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenlet egy alaprendszerének az előállítása

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Az

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = 0 \tag{9}$$

feladatot ***n*-edrendű állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletnek** nevezzük.

Tétel. Tegyük fel, hogy az

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = 0 \qquad (a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}) \tag{10}$$

egyenlet

$$K(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

karakterisztikus polinomjának a λ szám m-szeres gyöke. Ekkor

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t},\ \varphi_2(t) = te^{\lambda t}, \dots, \varphi_m(t) = t^{m-1}e^{\lambda t} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvények a (10) egyenlet lineárisan független valós megoldásai.

Az állandó együtthatós n-edrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásának az előállítása

Megjegyzés: Az

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = b(t) \qquad (t \in I)$$

állandó együtthatós n-edrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásának az előállításához felhasználhatjuk az állandók variálásának a módszerét. Ez elvben mindig célhoz vezet, azonban esetenként meglehetősen fáradságos, sok számolást igénylő eljárás. Ezért "megbecsülendők" azok a módszerek, amelyek révén más úton juthatunk el egy partikuláris megoldáshoz. Egy ilyen módszer a próbafüggvény-módszer, amelyik bizonyos speciális jobboldal, vagyis b függvény esetén alkalmazható.

Tétel. (*Próbafüggvény-módszer*) Tekintsük az

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = P(t)e^{\alpha t}\big(c\sin(\beta t) + d\cos(\beta t)\big) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

egyenletet, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}; c; d; \alpha; \beta$ valós számok és P egy polinom.

Legyen $\mu := \alpha + i\beta$ és

$$\tilde{k} := \begin{cases} 0, & \text{ha } \mu \text{ nem gyöke a homogén egyenletrendszer karakterisztikus polinomjának} \\ k, & \text{ha } \mu \text{ } k\text{-szoros gyöke a homogén egyenletrendszer karakterisztikus polinomjának} \end{cases}$$

Ekkor az egyenletnek létezik

$$\psi_p(t) = t^{\tilde{k}} G(t) \cdot e^{\alpha t}\big(A\sin(\beta t) + B\cos(\beta t)\big)$$

alakú megoldása, ahol $A, B \in \mathbb{R}$ és G egy legfelejebb $deg(P)$-edfokú polinom.

Kiegészítés

Darboux-integrál

Legyen$-\infty < a < b < \infty$ és , $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f korlátos függvény
A $\{a, b\} \subset \tau \subset [a, b]$ véges halmaz egy felosztása $[a, b]$-nek.

Ha τ n+1 elemű és elemeit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jelöli, akkor $\tau = \Big\{x_0, x_1, \ldots, x_n\Big\}$, ahol

$$a := x_0 < x_1 < \ldots < x_n := b \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Megjegyzés: Az intervallumok nem feltétlenül azonos hosszúságúak.

Továbbá legyen:

$$m_i := m_i(f) := \inf\Big\{f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\Big\} = \inf f(x_{i+1} - x_i) \qquad (i = 0, \ldots, n-1)$$
$$M_i := M_i(f) := \sup\Big\{f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\Big\} = \sup f(x_{i+1} - x_i) \qquad (i = 0, \ldots, n-1)$$

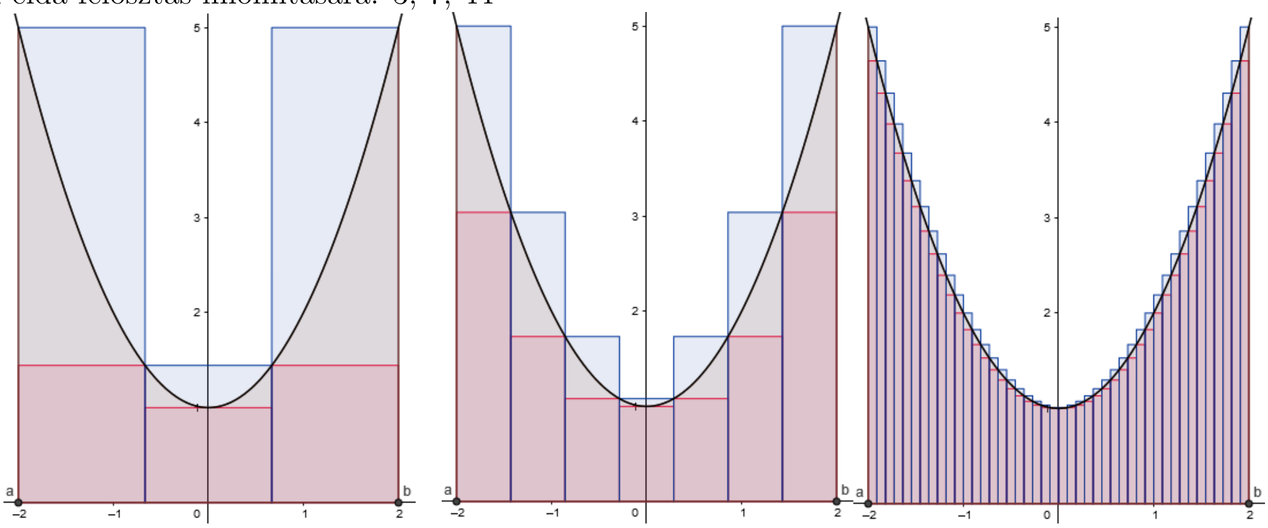
valamint
az f függvény τ-hoz tartozó alsó integrálközelítő összege

$$s(f, \tau) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i\big(x_{i+1} - x_i\big)$$

az f függvény τ-hoz tartozó felső integrálközelítő összege

$$S(f, \tau) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i\big(x_{i+1} - x_i\big)$$

Példa felosztás finomítására: 3, 7, 44



Legyen $\Gamma := \Big\{\tau \subset [a, b] \text{ felosztás }\Big\}$ $[a, b]$ intervallum felosztásainak halmaza.

Legyen $\tau_1 \in \Gamma$ és $\tau_2 \in \Gamma$ felosztásai $[a, b]$-nek. Azt mondjuk, hogy τ_2 finomítása τ_1-nek, ha $\tau_1 \subset \tau_2$. A τ_1 és τ_2 közös finomítása $\tau_1 \cup \tau_2$.

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos és $\tau_1 \subset \tau_2$ az $[a, b]$ felosztásai, akkor

$$s(f, \tau_1) \leq s(f, \tau_2) \wedge S(f, \tau_1) \geq S(f, \tau_2)$$

Így, ha $\tau_1, \tau_2 \in \Gamma$ tetszőleges felosztás (nem feltételenül egymás finomításai), akkor

$$s(f,\tau_1) \leq s(f,\tau_1 \cup \tau_2) \leq S(f,\tau_1 \cup \tau_2) \leq S(f,\tau_2)$$

emiatt

Az $\Big\{s(f,\tau) : \tau \in \Gamma\Big\}$ felülről korlátos, illetve az $\Big\{S(f,\tau) : \tau \in \Gamma\Big\}$ alulról korlátos.

Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos, az

$$I_*(f) := sup\Big\{s(f,\tau) : \tau \in \Gamma\Big\}$$
$$I^*(f) := inf\Big\{S(f,\tau) : \tau \in \Gamma\Big\}$$

valós számokat az f függvény ($[a,b]$ intervallumon vett) alsó, illetve felső Darboux-integráljának nevezzük.

A definíciók alapján: $\forall \tau_1, \tau_2 \in \Gamma : s(f,\tau_1) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S(f,\tau_2)$

Az f függvény Riemann-integrálható, ha $I_*(f) = I^*(f)$, ekkor legyen

$$\int_a^b f := \int_{[a,b]} f := \int_a^b f(x)dx := I_*(f) = I^*(f)$$

az f függvény Riemann-integrálja (határozott integrálja). Jelölése: $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Megjegyzés: A határozott integrál ez esetben egy valós szám, míg a határozatlan integrál primitív függvények összessége.

Parciális integrálás

Példa (1): $\int x \cdot e^x dx$

Legyen $\begin{array}{c|c} f = e^x & g' = x \\ \hline f' = e^x & g = \int x dx \end{array}$

Ekkor a választás nem megfelelő, mert ebben az esetben $\int x \cdot e^x = e^x \cdot \frac{x^2}{2} - \int e^x \cdot \frac{x^2}{2}$.

Itt most x helyett lett egy x^2, ami semmiképp sem tekinthető egyszerűbb alaknak.

Ezért $\int e^x \cdot x dx$ legyen $\begin{array}{c|c} f = x & g' = e^x \\ \hline f' = 1 & g = e^x \end{array}$

Ekkor

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

Példa (2): $\int x^2 \cdot e^x dx$

Legyen $\begin{array}{c|c} f = x^2 & g' = e^x \\ \hline f' = 2x & g = e^x \end{array}$

Ekkor

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - \underbrace{\int 2x \cdot e^x dx}_{\text{ez tovább egyszerűsíthető}} =$$

$f = 2x$	$g' = e^x$
$f' = 2$	$g = e^x$

$$\int 2x \cdot e^x dx = 2x \cdot e^x - 2\int e^x$$

Ezt visszahelyettesítve

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - \left(2x \cdot e^x - 2\int e^x\right) + C =$$

Jellemzően, ha a függvény $x^n \cdot (e^x | \sin x | \cos x)$, akkor az x^n legyen az f. $x^n \cdot (\ln x | \arctan x | \log x)$ esetén pedig fordítva.

▷

Alapvetően 3 típust különböztetünk meg az integrandus alapján:

- Hatványfüggvénnyel szorzott exponenciális, trigonometrikus, hiperbolikus függvények

  Ekkor mindig a hatványfüggvényt érdemes f-nek, a másik szorzótényezőt pedig g'-nek elnevezni.

$$Pl: \int 5x \sinh 2x dx = \frac{5x \cos 2x}{2} - \int \frac{5 \cosh 2x}{2} dx = \frac{5x \cosh 2x}{2} - \frac{5 \sinh 2x}{4}$$

  Megjegyzés: Ha a hatványfüggvény 1-nél magasabb fokú, akkor többször egymás után kell alkalmaznunk a módszert.

- Logarimus-, area-, arcus függvények és ezekkel szorzott hatványfüggvények.

  Ekkor mindig a logaritmus függvényt érdemes f-nek és a másik szorzótényezőt g'-nek elnevezni.

$$Pl: \int -2x \ln x dx = -x^2 \ln x - \int -x^2 \frac{1}{x} dx = -2x^2 \ln x + \frac{x^2}{2}$$

- Exponenciális függvény és trigonometrikus, illetve hiperbolikus függvények szorzata

  Ekkor a választásunk tetszőleges, minden esetben célhoz érünk, ha a módszert kétszer egymás után alkalmazzuk, majd a kiindulást a kapott eredménnyel összehasonlítjuk.

$$Pl: \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$
$$\Downarrow$$
$$\int e^x \sin x dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2}$$

Megjegyzés: Szögfüggvények szorzatát is lehet parciálisan integrálni, ám ekkor sokszor a szorzat megfelelő átalakítások után összeggé alakítható, így sokszor azt célszerűbb integrálni.

◁