4 - Interpolációs eljárások

Az interpoláció lényege

$Legyenek$

$x_0, x_1, \dots, x_n$ $különböző\ alappontok,$

$y_0, y_1, \dots, y_n$ $függvény\ értékek$ $\big(általában:\ y_i = f(x_i)\big)$

$Olyan\ P_n \in \mathcal{P}_n\ (max\ \ n.fokú\ )\ polinomot\ keresünk, melyre$

$P_n(x_i) = y_i \quad (i = 0,1, \dots, n)\ (P_n - t\ interpolációs\ polinomnak\ nevezzük)$

Lagrange-interpoláció

Definíció

$Az\ x_0, x_1, \dots, x_n\ különböző\ pontok\ által\ meghatározott$
$Lagrange - alappolinómok\ a\ következők:$

$$l_k(x) \coloneqq \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \qquad (k = 0, \dots, n)$$

Állítás

$$1)\ l_k(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1\ ,\ ha\ k = i \\ 0\ ,\ ha\ k \neq i \end{cases}$$

$$2)\ l_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega'_n(x)}\ ahol\ \omega_n(x) = \prod_{j=0}^{n} x - x_j$$

$$3)\ L_n = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)$$

Jelölés

$\|f\|_\infty \coloneqq \|f\|_{C[a,b]} \coloneqq max\{\ |f(x)| : x \in [a, b]\ \}$

Tétel (Hibaformula)

$Legyen\ [a, b]\ az\ x_0, x_1, \dots, x_n$ és $x \in \mathbb{R}\ (tetsz.)\ által\ meghatározott\ intervallum.$

$Tegyük\ fel, hogy\ f \in C^{n+1}[a, b]. Ekkor\ \exists \xi_k \in [a, b]:$

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_k)}{(n+1)!} \omega_n(x),$$

$$illetve\ \ |f(x)-P_n(x)| \leq \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{(n+1)!}|\omega_n(x)| \leq \frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{(n+1)!}\|\omega_n\|_\infty$$

Bizonyítás: (Rolle-tétel segítségével)

$\exists i : x = x_i \ \big(feltehető, hogy\ x \neq x_i\ (\forall i - re)\big)$

$g_x(z) \coloneqq f(z) - P_n(z) - \dfrac{\omega_n(z)}{\omega_n(x)} \cdot \big(f(x) - P_n(x)\big)$

$g_x(x_i) = 0\ (i = 0, \dots, n)$ és $g_x(x) = 0, tehát\ g_x - nek\ n + 2\ darab\ gyöke\ van$

$\Longrightarrow Alkalmazzuk\ a\ Rolle - tételt:\ \ g_x' - nek\ n + 1\ db\ gyöke\ van\ [a, b] - ben$

$g_x'' - nek\ n\ db\ gyöke\ van\ [a, b] - ben$

$\dots$

$g_x^{(n+1)} - nek\ 1\ db\ gyöke\ van\ [a, b] - ben,$

$jelöljük\ ezt\ \xi_k - el$

$g_x^{(n+1)}(\xi_k) = 0$

$g_x^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - 0 - \dfrac{(n+1)!}{\omega_n(x)} \cdot \big(f(x) - P_n(x)\big)$

$g_x^{(n+1)}(\xi_k) = f^{(n+1)}(\xi_k) - 0 - \dfrac{(n+1)!}{\omega_n(x)} \cdot \big(f(x) - P_n(x)\big) = 0, tehát$

$f^{(n+1)}(\xi_k) = \dfrac{(n+1)!}{\omega_n(x)} \cdot \big(f(x) - P_n(x)\big)$

$\dfrac{f^{(n+1)}(\xi_k)}{(n+1)!}\omega_n(x) = \big(f(x) - P_n(x)\big)$

□

Hermite-interpoláció

Definíció

$Legyenek$

$x_0, x_1, \dots, x_k \in [a, b]\ különböző\ alappontok,$

$m_0, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}\ multiplicitásértékek,$

$y_0^{(j)}, y_1^{(j)}, \dots, y_k^{(j)}\ függvény\ és\ derivált\ értékek\ \ (j = 0, \dots, m_i - 1),$

$$m \in \mathbb{N}, m + 1 = \sum_{i=0}^{k} m_i$$

$Olyan\ H_m \in \mathcal{P}_m\ polinomot\ keresünk, melyre\ H_m^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}$

$(i = 0, \dots, k\ és\ j = 0, \dots, m_i - 1)$

$A\ feltételnek\ eleget\ tevő\ polinomot\ Hermite - polinomnak\ nevezzük.$

Tétel

Ha $x_0, x_1, \dots, x_k$ *különbözők, akkor* $\exists!\, H_m$

Bizonyítás:

$$H_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \ \ alakban\ keressük, ami\ egy\ lineáris\ egyenletrendszer.$$

$$pl.: m_0 = 3, m_1 = 2$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \cdots & {x_0}^m \\ 0 & 1 & 2x_0 & \cdots & m{x_0}^{m-1} \\ 0 & 0 & 2 & \dots & m(m-1){x_0}^{m-2} \\ \hdashline 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^m \\ 0 & 1 & 2x_1 & \dots & m{x_1}^{m-1} \\ & & & \vdots & \end{array}\right] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} y_0^{(0)} \\ y_0^{(1)} \\ y_0^{(2)} \\ \hdashline y_1^{(0)} \\ y_1^{(1)} \\ \vdots \end{array}\right]$$

$det(A) \neq 0 \Leftrightarrow Egyértelműen\ létezik\ megoldás$
$A\ homogén\ lineáris\ egyenletrendszer\ segítsével\ belátjuk, hogy\ det(A) \neq 0.$

$Tegyük\ fel\ indirekt, hogy\ \exists H_1 \neq H_2$
$megoldása\ a\ homogén\ Hermite - interpolációs\ feladatnak.$
$R := H_1 - H_2 \qquad R^{(j)}(x_i) = H_1^{(j)}(x_i) - H_2^{(j)}(x_i) = 0$
$\Longrightarrow x_0, x_1, \dots, x_k - ban\ nulla,\ \ plusz\ a\ deriváltak\ is$
$\Longrightarrow m + 1\ gyöke\ van\ multiplicitással\ számolva,$
$de\ R \equiv 0, így\ ellentmondásra\ jutottunk.$

$\square$

Tétel (Bizonyítás nélkül)

$Ha\ f \in C^{m+1}[a,b]\ és\ [a,b]\ az\ x_0, x_1, \dots, x_k\ által\ kifeszített\ intervallum,$
$akkor\ \exists \xi_x \in [a,b]:$

$$f(x) - H_m(x) = \frac{f^{m+1}(\xi_x)}{(m+1)!} \cdot \Omega_m(x),$$
$$ahol\ \Omega_m(x) = \prod_{i=0}^{k} (x - x_i)^{m_i}$$

$Továbbá$

$$|f(x) - H_m(x)| \leq \frac{\left\| f^{(m+1)} \right\|_{C[a,b]}}{(m+1)!} \cdot |\Omega_m(x)|$$

A Hermite-interpoláció felírásának módjai

1) *Lineáris egyenletrendszerből megoldva.*
2) *Lagrange-alakkal, de ezt csak speciális esetekben, és bonyolult is.*
3) *Newton-alakkal.*

Spline interpoláció

Spline függvények

$[a,b] \subseteq \mathbb{R}, \qquad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \; felosztás, \qquad I_k := [x_{k-1}, x_k]$
$Az \; S{:}\,[a,b] \to \mathbb{R} \; függvényt \; spline-nak \; nevezzük, ha$

1) $S|_{I_k} \in \mathcal{P}_l \;\; (\forall k-ra, és \; l \; a \; spline \; fokszáma)$
2) $S \in C^{l-1} \;\; (Belső \; felosztáspontokra)$

Az S interpolációs spline, ha még

3) $S(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, \dots, n)$

Lokális bázis

$P_k(x) = \sum_{j=0}^{l} a_j^{(k)} \cdot (x - x_{k-1})^j \;\; alakban \; keressük.$
$Az \; 1-3. \, feltételekre \; felírjuk \; a \; LER-t \; az \; a_j^{(k)} \; együtthatókra.$
$Redukálható \; kisebb \; méretűre, és \; csak \; l = 1{,}2{,}3-ra \; szokás \; megnézni.$

l=1, Elsőfokú spline

$$P_k(x) = a_0^{(k)} + a_1^{(k)}(x - x_{k-1}) \qquad x \in I_k$$

$1) \; OK$
$2) \; Folytonosság \; kell \; (l = 1)$
$3) P_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1}) = a_0^{(k)} + 0$
$\quad P_k(x_k) = f(x_k) = a_0^{(k)} + a_1^{(k)}(x_k - x_{k-1}), \quad a_1^{(k)} = \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$

l=2, Másodfokú spline

$$P_k(x) = a_0^{(k)} + a_1^{(k)}(x - x_{k-1}) + a_2^{(k)}(x - x_{k-1})^2$$

$1) \; OK$
$Ismeretlenek \; száma: 3n \; (Minden \; intervallumon \; 3 \; együttható)$
$Feltételek \; száma: int.pol.felt.: 2n \; (Minden \; polinomra \; 2 \; db)$
$\Rightarrow S \in C$
$S' \in C: n-1 \; db \; (belső \; pontokban) \Rightarrow 3n-1 \; db$

$Tehát\ hiányzik\ 1\ db\ feltétel\ az\ egyértelműséghez.$
$Ezt\ peremfeltételként\ szokás\ megadni.$

l=3, Köbös spline

$Ismeretlenek\ száma: 4n\ \ db$
$Feltételek\ száma: \ int.pol.felt.: 2n\ \ db\ (\Longrightarrow \in C)$
$S_3' \in C\ (belső\ pontokban): n-1\ \ db$
$S_3'' \in C\ (belső\ pontokban): n-1\ \ db \Longrightarrow 4n-2\ \ db$

Általában

l-ed fokú spline esetén (l-1) db feltétel hiányzik. A hiányzó feltételeket peremfeltételként adjuk meg.

Klasszikus peremfeltételek

1) $Hermite-féle: S_3'(a) = f'(a)$ és $S_3'(b) = f'(b)$
2) $Természetes: \ S_3''(a) = 0$ és $S_3''(b) = 0$
3) $Periodikus: Ha\ f\ periodikus$ és $(a,b)\ a\ periodusa\ (azaz\ f(a) = f(b)), akkor$
$S_3'(a) = S_3'(b)$ és $S_3''(a) = S_3''(b)$

Globális bázis

Jelölés

$S_l(\Omega_n): az\ \Omega_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}\ alappontokhoz$ $értelmezett$
$l-edfok$ú $spline-ok\ halamza.$

$$(x-x_k)_+^l := \begin{cases} (x-x_k)^l & , \quad ha\ x \geq x_k \\ 0 & , \quad ha\ x < x_k \end{cases}$$

Tétel (Bizonyítás nélkül)

1) $dim\ (S_l(\Omega_n)) = l + n$
2) $Az\ 1, x, x^2, \dots, x^l, (x-x_1)_+^l, \dots, (x-x_{k-1})_+^l\ lin.$ $független\ rendszer\ S_l(\Omega_n) - en.$
3) $\forall S \in \ S_l(\Omega_n)\ egyértelműen\ előállítható\ a\ 2)\ pontbeli\ függvény - rendszerrel.$

B-spline-ok

Definíció

$supp(f) := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$
$\Omega_\infty := \{\dots, x_{-1}, x_0, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots\}\ végtelen\ alappontrendszer, az\ f\ tartója.$

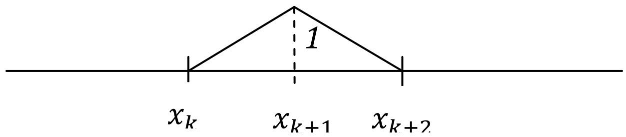
$A\ B_{l,k}\ spline-okat\ B-spline-onak\ nevezzük\ \left(B_{l,k}\in S_l(\Omega_\infty)\right), ha$

1) $B_{l,k}\ \geq 0$

2) $supp\left(B_{l,k}\right)\ minimális$

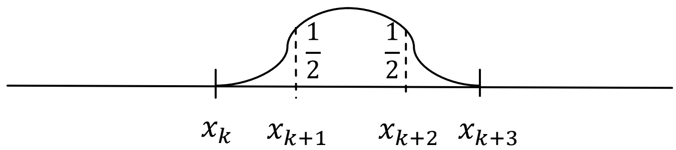
3) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} B_{l,k}(x)\equiv 1$

l=1, „kalapfüggvény”



$$B_{1,k}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} & ,\ ha\ x\in[x_k,x_{k+1}]\\ \dfrac{x_{k+2}-x}{x_{k+2}-x_{k+1}} & ,\ ha\ x\in[x_{k+1},x_{k+2}]\\ 0 & ,\ \text{egyébként}\end{cases}$$

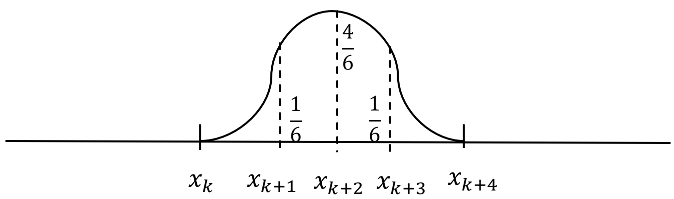
l=2



$h\equiv h_k$

$$B_{2,k}(x)=\frac{1}{2h^2}\cdot\begin{cases}x-x_k & ,\quad ha\ \ x\in[x_k,x_{k+1}]\\ h^2+2h(x-x_{k+1})-2(x-x_{k+1})^2 & ,\quad ha\ x\in[x_{k+1},x_{k+2}]\\ (x_{k+3}-x)^2 & ,\quad ha\ \ x\in[x_{k+2},x_{k+3}]\\ 0 & ,\quad egyébként\end{cases}$$

l=3



$h\equiv h_k$

$$B_{3,k}(x)=\frac{1}{6h^3}\cdot\begin{cases}(x-x_k)^3 & ,\ ha\ x\in[x_k,x_{k+1}]\\ h^3+3h^2(x-x_{k+1})+3h(x-x_{k+1})^2-3(x-x_{k+1})^3, & ha\ x\in[x_{k+1},x_{k+2}]\\ h^3+3h^2(x_{k+3}-x)+3h(x_{k+3}-x)^2-3(x_{k+3}-x)^3, & ha\ x\in[x_{k+2},x_{k+3}]\\ (x_{k+4}-x)^3 & ,\ ha\ x\in[x_{k+3},x_{k+4}]\\ 0 & ,\ egyébként\end{cases}$$

Tétel (Rekurzió, bizonyítás nélkül)

$$B_{l,k}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+l} - x_k} B_{l-1,k}(x) + \frac{x_{k+l+1} - x}{x_{k+l+1} - x_{k+1}} B_{l-1,k+1}(x)$$

Tétel (Előállítás, bizonyítás nélkül)

$\forall S \in S_l(\Omega_n) : \exists!\, c_{-l}, \dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R} :$

$$S(x) = \sum_{j=-l}^{n-1} c_j B_{l,j}$$

Hibabecslések

Tétel (l=1)

$f \in C^2[a,b]$ és $S_1 \in S_1(\Omega_\mathrm{n})$ $interpolációs\ spline, akkor$

$$\|f - S_1\|_\infty \le \frac{h^2}{8} \|f''\|_\infty , \qquad ahol\ h \coloneqq \max|h_k| \ \ (k = 1, \dots, n)$$

Bizonyítás:

$\forall I_n - en\ lin. int. pol.$

$\square$

Tétel (l=1, Bizonyítás nélkül)

$f \in C^1[a,b]$ és $S_1 \in S_1(\Omega_\mathrm{n})$ $interpolációs\ spline, akkor$

$$\|f - S_1\|_\infty \le h\|f'\|_\infty$$

Tétel (l=1, Bizonyítás nélkül)

$f \in C[a,b]$ és $S_1 \in S_1(\Omega_\mathrm{n})$ $interpolációs\ spline, akkor$

$$\|f - S_1\|_\infty \le 2E_{S_1(\Omega)}(f) , \qquad ahol\ \ E_{S_1(\Omega)}(f) \coloneqq \min_{S \in S_1(\Omega_\mathrm{n})} \|f - S\|_\infty$$

Tétel (l=3, Bizonyítás nélkül)

$f \in C^4[a,b]$ és $S_3 \in S_3(\Omega_\mathrm{n})$ $interpolációs\ spline, Hermite - peremfeltétellel, akkor$

$$\|f - S_3\|_\infty \le \frac{5}{384}\, h^4 \|f^{IV}\|_\infty \qquad \left(\frac{5!}{2^4 * 4!}\right)$$
$$\|f' - S_3'\|_\infty \le \frac{1}{24}\, h^3 \|f^{IV}\|_\infty \qquad \left(\frac{1}{4!}\right)$$
$$\|f'' - S_3''\|_\infty \le \frac{3}{8}\, h^2 \|f^{IV}\|_\infty \qquad \left(\frac{3}{2^3}\right)$$

Tétel (l=3, Bizonyítás nélkül)

$f \epsilon C^2[a,b]$ és $S_3 \in S_3(\Omega_\mathrm{n})$ $interpolációs\ spline,$
$valamelyik\ klasszikus\ peremfeltétellel, akkor$

$$\|f''\|_2 \geq \|S_3''\|_2$$