DEFINÍCIÓ: Legyen V nem üres halmaz (elemei: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$). V vektortér az $\mathbb{R}$ felett a $\dot{+}, \lambda\cdot$ műveletekre nézve, ha teljesül mind a tíz alábbi követelmény:
I./1. $\dot{+} : V \times V \to V$, azaz $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$-hez hozzá van rendelve egy $\mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b} \in V$;
I./2. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V \quad \mathbf{b} \dot{+} \mathbf{a} = \mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b}$ (kommutativitás);
I./3. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V \quad (\mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b}) \dot{+} \mathbf{c} = \mathbf{a} \dot{+} (\mathbf{b} \dot{+} \mathbf{c})$ (asszociativitás);
I./4. $\exists \mathbf{0} \in V : \forall \mathbf{a} \in V \quad \mathbf{0} \dot{+} \mathbf{a} = \mathbf{a} (= \mathbf{a} \dot{+} \mathbf{0})$ („nullvektor" létezése);
I./5. $\forall \mathbf{a} \in V\ \exists (-\mathbf{a}) \in V : (-\mathbf{a}) \dot{+} \mathbf{a} = \mathbf{0}\ (= \mathbf{a} \dot{+} (-\mathbf{a}))$ („ellentett" létezése);
II./1. $\lambda\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$, azaz $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in V$-hez hozzá van rendelve egy $\lambda \cdot \mathbf{a} \in V$;
II./2. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in V \quad (\lambda\mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{a})$ („asszociativitás");
II./3. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in V \quad (\lambda + \mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{a} \dot{+} \mu \cdot \mathbf{a}$ (első disztibutivitás);
II./4. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V \quad \lambda \cdot (\mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b}) = \lambda \cdot \mathbf{a} \dot{+} \lambda \cdot \mathbf{b}$ (második disztributivitás);
II./5. $\forall \mathbf{a} \in V \quad 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$.

TÉTEL: $\exists!\, \mathbf{0} \in V : \forall \mathbf{a} \in V \quad \mathbf{0} \dot{+} \mathbf{a} = \mathbf{a} (= \mathbf{a} \dot{+} \mathbf{0})$.
TÉTEL: $\forall \mathbf{a} \in V\ \exists!\, (-\mathbf{a}) \in V : (-\mathbf{a}) \dot{+} \mathbf{a} = \mathbf{0}\ (= \mathbf{a} \dot{+} (-\mathbf{a}))$.
TÉTEL: $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in V$ esetén
$\lambda \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ vagy $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.
TÉTEL: $\forall \mathbf{a} \in V$, $(-\mathbf{a}) = (-1) \cdot \mathbf{a}$.

DEFINÍCIÓ: Legyen $k \geqq 1$; $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in V$ [vektorrendszer, rövidítve: vr; a „rendszer" arra utal, hogy a vektorok között lehetnek egyenlők, akár mind egyenlő lehet]; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ vr $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ együtthatós LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k$. Az eredmény egy V-beli vektor. Az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ vr TRIVIÁLIS LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA: $0\mathbf{a}_1 + \ldots + 0\mathbf{a}_k$. Bármely vr triviális lineáris kombinációja $= \mathbf{0}$.
DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ vr LINEÁRISAN ÖSSZEFÜGGŐ (rövidítve: Ö), ha
$\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, nem mind 0, melyekre $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ (azaz, ha a vektorrendszernek létezik nullvektort adó nemtriviális lineáris kombinációja).
DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ vr LINEÁRISAN FÜGGETLEN (rövidítve: L), ha
$\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k \in \mathbb{R}; \mu_1\mathbf{a}_1 + \mu_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \mu_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k = 0\}$ (azaz, ha a vektorrendszernek CSAK a triviális lineáris kombinációja ad nullvektort).
DEFINÍCIÓ: Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett a $+, \lambda\cdot$ műveletekre, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in V$. Az $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ bázis (rövidítve: B) V-ben, ha L és a V minden vektorát előállítják lineáris kombinációjukként.

TÉTEL (ELEMI BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ):
Legyen $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ B V-ben; $\mathbf{a} \in V$; $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n$; $1 \leqq i \leqq n$. Ekkor
$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{a}, \mathbf{e}_{i+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ B V-ben $\quad\Leftrightarrow\quad \alpha_i \neq 0$.

TÉTEL: $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V\ \exists!\, \mathbf{x} \in V : \mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$.
TÉTEL: $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ B V-ben, $\mathbf{a} \in V \Rightarrow \exists!\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} : \mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n$.
TÉTEL: Ha $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in V$ olyan, hogy $\forall \mathbf{a} \in V\ \exists!\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} : \mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n$, akkor $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ bázis V-ben.

DEFINÍCIÓ: $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ B V-ben, $\mathbf{a} \in V$, $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n$ esetén azt mondjuk, hogy az a koordinátái az $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ bázisban $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Jelölése:

$$[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}} = [\mathbf{a}]_{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

DEFINÍCIÓ: W altere V-nek [jelölése: $W \leqq V$], ha $W \subseteq V$ és W vektortér az $\mathbb{R}$ felett „a V beli műveletekre", azaz pontosan fogalmazva a $+_{|W}$ és $\lambda\cdot_{|W}$ műveletekre nézve.

TÉTEL: $W \leqq V \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 1. & \emptyset \neq W \subseteq V \\ 2. & \mathbf{a}, \mathbf{b} \in W \Rightarrow \mathbf{a}+\mathbf{b} \in W \\ 3. & \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in W \Rightarrow \lambda\mathbf{a} \in W \end{Bmatrix}$.

DEFINÍCIÓ: Az A „$\subseteq$" V jelentse azt, hogy $\mathbf{a} \in A \Rightarrow \mathbf{a} \in V$ (de itt csak egyszer!).
DEFINÍCIÓ: $\emptyset \neq A$ „$\subseteq$" V és $\mathbf{v} \in V$ esetén azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}$ lineárisan függ az A-tól, ha a $\mathbf{v}$ előállítható valamely véges sok A beli vektor valós együtthatós lineáris

TÉTEL: $k \geqq 2$, $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in V$ esetén
$\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ Ö $\Leftrightarrow \exists \mathbf{a}_i$, ami lineárisan függ az $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, ..., \mathbf{a}_k$ vektorrendszertől.

DEFINÍCIÓ: $\emptyset \neq A$ „$\subseteq$" V esetén $W(A) = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in V, \mathbf{v}$ lineárisan függ A-tól$\}$.
TÉTEL: Tetszőleges $\emptyset \neq A$ „$\subseteq$" V esetén $W(A) \leqq V$, továbbá A „$\subseteq$" $W(A)$.

TÉTEL: $\{W_1 \leqq V, W_2 \leqq V\} \Rightarrow W_1 \cap W_2 \leqq V$.
TÉTEL: $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k, \mathbf{b} \in V$; $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ L és $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k, \mathbf{b}$ Ö esetén $\mathbf{b}$ lineárisan függ az $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$-tól.

DEFINÍCIÓ: $\emptyset \neq A$ „$\subseteq$" V esetén tekintsük a V összes, az A-t „tartalmazó" alterének a metszetét. Ennek neve: az A által generált (kifeszített) altér, jelölése: $\langle A \rangle$.

TÉTEL: $\emptyset \neq A$ „$\subseteq$" V esetén $\langle A \rangle = W(A)$.
DEFINÍCIÓ: G **generátorrendszer** (rövidítve: G) V-ben, ha $\emptyset \neq G$ „$\subseteq$" V és $\langle G \rangle = V$. Így már a **bázis** definícióját is rövidíthetjük: **B (V-ben) $\equiv$ L és G (V-ben).** Ez végtelen vektorrendszerre is érvényes lesz, ha L-et definiáljuk erre az esetre: Egy végtelen vektorrendszer L, ha bármely véges részrendszere L.

TÉTEL: Ha $V \neq \{\mathbf{0}\}$ és V-ben van véges generátorrendszer (V „végesdimenziós"), akkor létezik bázis V-ben, sőt bármely véges generátorrendszerből kiválasztható bázis.

1. SZÁMÚ KICSERÉLÉSI TÉTEL: Legyen $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ L; $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_m$ G V-ben. Ekkor
α) $\exists j \in \{1, ..., m\} : \mathbf{b}_j, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ L $\quad\beta$) $k \leqq m$ (azaz $|\mathrm{L}| \leqq |\mathrm{G}|$).

TÉTEL: Ha $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ bázisok V-ben, n pozitív egész, $|\mathrm{B}_1| = n$, akkor B_2 is véges és $|\mathrm{B}_2| = n$.

DEFINÍCIÓ: **Az $\mathbb{R}$ feletti V vektortér dimenziója**:

$$\dim V = \begin{cases} 0\,, & \text{ha } V = \{\mathbf{0}\}\,; \\ \text{egy tetszőleges B elemszáma}, & \text{ha } V \neq \{\mathbf{0}\} \text{ és van véges G } V\text{-ben}\,; \\ \infty & \text{egyébként.} \end{cases}$$

DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m$ **vektorrendszer rangja** az általuk generált altér dimenziója:
$r(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m) = \dim\langle \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m \rangle$ (az r helyén használatos a ρ illetve ϱ is.)
Ha $\dim V = n > 0$, akkor V-ben tetszőleges B, L, illetve G-re $|\mathrm{B}| = n$, $|\mathrm{L}| \leqq n$, $|\mathrm{G}| \geqq n$.

2. SZÁMÚ KICSERÉLÉSI TÉTEL: Legyen $\dim V = n > 0$; $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ L; $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_m$ G V-ben. Ekkor
α) $\exists j_1, ..., j_s \in \{1, ..., m\}$ [itt $s \geqq 0$]: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{j_1}, ..., \mathbf{b}_{j_s}$ B V-ben.
β) $m = n$ esete: Ekkor G helyett B lesz, s az így adódó állítás szerepel kicserélési tételként Gyapjas Ferenc: Lineáris algebra és geometria c. jegyzetében.
γ) Lineárisan független rendszer kiegészíthető bázissá.
δ) $|\mathrm{L}| = n$ esetén az L B is.

DEFINÍCIÓ: Legyenek adottak az n és m pozitív egész számok, továbbá minden $i \in \{1,...,n\}$ és $j \in \{1,...,m\}$ esetére az a_{ij} valós számok. Az $\begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nm} \end{bmatrix}$ táblázatot egy $\mathbb{R}$ feletti mátrixnak nevezzük, s A-val jelöljük, részletesebben $A = [a_{ij}]_{n\times m}$, vagy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nm} \end{bmatrix}$, az A mátrix i-edik sora j-edik elemének jelölése: a_{ij} vagy ${}_i[A]_j$.
Az A és a B mátrixok egyenlők, ha alakjuk azonos (mondjuk $n \times m$-es) és a megfelelő elemeik megegyeznek, azaz minden „szóbajövő" i, j párra ($1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq j \leqq m$) teljesül, hogy ${}_i[A]_j = {}_i[B]_j$. Az $\mathbb{R}$ feletti $n \times m$-es mátrixok halmazát $\mathbb{R}^{n\times m}$-mel jelöljük ($\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$).
műveletek:
$+ : \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $\quad A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ esetén $A + B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ és minden szóbajövő i, j-re ${}_i[A+B]_j = {}_i[A]_j + {}_i[B]_j$.
$\lambda\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $\quad \lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ esetén $\lambda A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ és minden szóbajövő i, j-re ${}_i[\lambda A]_j = \lambda\, {}_i[A]_j$.
TÉTEL: $\mathbb{R}^{n\times m}$ vektortér az $\mathbb{R}$ felett a fenti $+$, $\lambda\cdot$ műveletekre nézve, $\dim \mathbb{R}^{n\times m} = nm$.
DEFINÍCIÓ: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ esetén $AB \in \mathbb{R}^{n\times k}$ úgy, hogy minden szóbajövő i, j-re (most $1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq k$)

$${}_i[AB]_j = \sum_{\ell=1}^{m} {}_i[A]_\ell\, {}_\ell[B]_j .$$

TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{n\times m_1}$, $B \in \mathbb{R}^{m_2\times k_2}$, $C \in \mathbb{R}^{k_3\times s}$ esetén

$$\begin{gathered}\exists\,(AB)C \Leftrightarrow \underbrace{\{m_1 = m_2 \text{ és } k_2 = k_3\}}_{\Downarrow} \Leftrightarrow \exists\, A(BC) \\ (AB)C = A(BC).\end{gathered}$$

TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{n\times m_1}$, $B \in \mathbb{R}^{m_2\times k_2}$, $C \in \mathbb{R}^{m_3\times k_3}$ esetén

$$\begin{gathered}\exists\, A(B+C) \Leftrightarrow \underbrace{\{m_1 = m_2 = m_3 \text{ és } k_2 = k_3\}}_{\Downarrow} \Leftrightarrow \exists\, AB + AC \\ A(B+C) = AB + AC.\end{gathered}$$

TÉTEL: $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k} \Rightarrow \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

DEFINÍCIÓ: $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ az $n \times n$-es egységmátrix, $\quad {}_i[I_n]_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j; \\ 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$ (A δ_{ij} egyik szokásos elnevezése: Kronecker-szimbólum.)
Az egységmátrix elnevezést az indokolja, hogy az I_n a szorzásnál minden olyan mátrixot változatlanul hagy, amellyel az adott sorrendben össze lehet szorozni:
TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ esetén $I_n A = A$ és $A I_m = A$.
DEFINÍCIÓ: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ esetén az A mátrix transzponáltja: $A^\top \in \mathbb{R}^{m\times n}$, melyre minden szóbajövő i, j-re ${}_i[A^\top]_j = {}_j[A]_i$.
TÉTEL (A transzponálás kapcsolata az eddigi műveletekkel):
$A, B \in \mathbb{R}^{n\times m} \Rightarrow (A+B)^\top = A^\top + B^\top$;
$\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times m} \Rightarrow (\lambda A)^\top = \lambda A^\top$;
$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k} \Rightarrow (AB)^\top = B^\top A^\top$.

DEFINÍCIÓ: $A = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ oszloprangja: $\varrho_\circ(A) = r(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m)$ (emlékeztető: $= \dim\langle \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m\rangle$); sorrangja pedig $\varrho_s(A) = \varrho_\circ(A^\top)$.

TÉTEL: Legyenek $C = [\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_m]$ és $D = [\mathbf{d}_1, ..., \mathbf{d}_k]$ ebben a sorrendben összeszorozható $\mathbb{R}$ feletti mátrixok. Ekkor $\varrho_\circ(CD) \leqq \varrho_\circ(C)$.

TÉTEL: Tetszőleges $\mathbb{R}$ feletti A mátrixra $\varrho_\circ(A) = \varrho_s(A)$ [ezentúl $= \varrho(A)$, az A rangja; a ϱ helyett használatos ρ vagy akár r is].

DEFINÍCIÓ: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ esetén:
az $A^{(\mathrm{j})}$ egy jobb oldali inverze az A-nak, ha $A^{(\mathrm{j})} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és $AA^{(\mathrm{j})} = I_n$;
az $A^{(\mathrm{b})}$ egy bal oldali inverze az A-nak, ha $A^{(\mathrm{b})} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és $A^{(\mathrm{b})}A = I_m$;
az A^{-1} kétoldali inverze A-nak, ha bal oldali inverze is és jobb oldali inverze is A-nak.
Az $AX = I_n$ fenti megoldhatósági feltételéből már leolvasható az $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ jobb oldali inverze létezésének szükséges és elégséges feltétele: $\varrho(A) = n$.

TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ esetén:
(1) $\exists\, A^{(\mathrm{j})} \Leftrightarrow \varrho(A) = n$;
(2) $\exists\, A^{(\mathrm{b})} \Leftrightarrow \varrho(A) = m$;
(3) $\exists\, A^{-1} \Rightarrow \varrho(A) = n = m \Rightarrow \exists\, A^{(\mathrm{b})}, \exists\, A^{(\mathrm{j})}$ és egyenlők $\Rightarrow \exists!\, A^{-1}$.

A négyzetes mátrixok között több olyan mátrix típus van, amely valamilyen számolás elvégzését megkönnyíti.

A következő $n\times n$-es mátrix neve diagonális mátrix: $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}$. Itt a nem-nulla elemek csak a főátlóban lehetnek (egy elem akkor van a főátlóban, ha a sorindexe és az oszlopindexe megegyezik), de a főátlóban is lehetnek nullák tetszőleges számban. Az $n\times n$-es diagonális mátrixokkal könnyű számolni, mert két ilyen diagonális mátrixot úgy lehet összeszorozni, hogy a megfelelő diagonális elemeket összeszorozzuk. Más mátrixoknál ez nem ilyen kellemes, de mégis örülünk, ha az alak legalább félig olyan, mint a diagonálisnál. Egy négyzetes mátrixot felső háromszög mátrixnak szokás hívni, ha a főátlója alatt mindenütt nulla van. Az alsó háromszög mátrixban pedig a főátló felett van mindenütt nulla. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetére megemlítünk még néhány speciális fajtát: A szimmetrikus, ha $A^\top = A$; A antiszimmetrikus, ha $A^\top = -A$; A projektor mátrix, ha $A^2 = A$; A nilpotens mátrix, ha van olyan k pozitív egész, melyre $A^k = \mathbf{0}$; A invertálható mátrix, ha van kétoldali inverze.

DEFINÍCIÓ: $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ esetén az A mátrix adjungáltja: $A^* \in \mathbb{C}^{m\times n}$, melyre minden szóbajövő j, k-ra ${}_j[A^*]_k = {}_k[\overline{A}]_j$. Az A mátrix adjungáltja a transzponáltjának a komplex konjugáltja.

TÉTEL (Az adjungálás kapcsolata a mátrixműveletekkel):
$A, B \in \mathbb{C}^{n\times m} \Rightarrow (A+B)^* = A^* + B^*$;
$\lambda \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{C}^{n\times m} \Rightarrow (\lambda A)^* = \overline{\lambda}A^*$;
$A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times k} \Rightarrow (AB)^* = B^*A^*$.

TÉTEL (rangtartó átalakítások): $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in V$ (vt. $\mathbb{R}$ felett), $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ esetén
$r(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k)$,
$r(\lambda\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k)$,
$r(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k)$,
$r(\mathbf{a}_1 + \lambda\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k)$.

TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\varrho(A) = r \geqq 1$ esetén $A \rightsquigarrow \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

DEFINÍCIÓ: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ esetén az $A^{(\mathrm{g})}$ egy általánosított inverze az A-nak, ha $A^{(\mathrm{g})} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és $AA^{(\mathrm{g})}A = A$.

DEFINÍCIÓ: Az $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix **determinánsa** egy alább definiált **szám**, melyet röviden $|A|$-val jelölünk, részletesebben kiírhatjuk a mátrix elemeit a szokott módon, de függőleges vonalak közé:

$$(|A| =) \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n \\ (1,\dots,n)}} (-1)^{I(i_1,i_2,\dots,i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n}.$$

TÉTEL: Legyen $n \geqq 2$.
a) Ha az $1, 2, \dots, n$ számok $i_1, i_2, \dots, i_n$ permutációjában két elemet felcserélünk, akkor az inverziószám páratlan számmal változik.
b) Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix valamely két sorát felcseréljük, akkor az így nyert B mátrix determinánsa: $|B| = -|A|$, azaz két sor felcserélése esetén a determináns értéke (-1)-gyel szorzódik.
TÉTEL: Ha $n \geqq 2$ és az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak van két megegyező sora, akkor A determinánsa 0.
TÉTEL: Ha $n \geqq 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix egyik sorához egy **másik** sorának a λ-szorosát hozzáadjuk, akkor az így keletkezett mátrix determinánsa is $|A|$, tehát az a *rangtartó* átalakítás, amikor egyik sorhoz egy másik sor számszorosát adjuk, egyben **determinánstartó** is!
TÉTEL:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

KÖVETKEZMÉNY: Felső háromszög mátrix (9/2) determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata.
KÖVETKEZMÉNY: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow \varrho(A) = n \Leftrightarrow \exists\, A^{-1}.$$

KIFEJTÉSI TÉTEL: $n \geqq 2,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén
a) Tetszőleges $1 \leqq i \leqq n$ esetén

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij};$$

b) Tetszőleges $1 \leqq j \leqq n$ esetén

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

CRAMER-SZABÁLY: $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n},\ |A| \neq 0,\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\exists!\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, melyre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, továbbá az $\mathbf{x}$ j-edik komponense $(j = 1, \dots, n)$

$$x_j = \frac{\det([\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{a}_n])}{\det([\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n])}.$$

Lineáris programozási feladat:

Egy olyan szélsőértékfeladatot, melyben a feltételek lineáris egyenlet-, illetve egyenlőtlenségrendszerrel vannak megadva, és egy lineáris célfüggvény szélsőértékét keressük, lineáris programozási feladatnak nevezünk.

Példák:

– Takarmányozási feladat: hogyan tudjuk a minimális napi szükségletet a lehető legolcsóbban beszerezni?

– Termelési feladat: hogyan tudjuk adott feltételek mellett a lehető legnagyobb hasznot termelni?

Lehetséges megoldás:

Azokat a pontokat, melyek a feltételrendszer összes feltételét kielégítik, lehetséges megoldásnak nevezzük.

Optimális megoldás:

Azokat a pontokat, melyek lehetséges megoldások, és ahol a célfüggvény értéke (feladattól függően) minimális/maximális, optimális megoldásnak nevezzük.

Standard alak:

$$
\begin{array}{lll}
A\underline{x} & = & \underline{b} \\
\underline{x} & \geq & \underline{0} \\
\underline{c}^T\underline{x} & \rightarrow & \max \\
(\underline{b} & \geq & \underline{0})
\end{array}
$$

Minden LP feladat standard alakra hozható:

- a feltételek közti egyenlőtlenségek kiküszöböléséhez segédváltozókat vezetünk be
- az x azon elemeit, melyek negatívak is lehetnek, felbontjuk $x_i^+ - x_i^-$ alakúra
- amennyiben minimumot keresünk, a célfüggvényt (-1)-el szorozva visszavezethetjük maximumkeresésre

Bázismegoldás:

Egy LP feladat bázismegoldása egy olyan vektor, melyben a bázishoz nem tartozó változók értéke 0. Minden LP feladatnak véges sok bázismegoldása van. Standard alakban létezik megengedett bázismegoldás.

Szimplex algoritmus:

Kezdeti/szimplex tábla:

$\underline{b}$	A	I
0	$-\underline{c}^T$	$\underline{0}^T$

1. Oszlopválasztás: az első olyan oszlopot választjuk, melyben az alsó (z-c) sorban negatív elem áll. Legyen ezen oszlop indexe j.

2. Generátor/pivot elem választása: a j. oszlopban kiválasztjuk azt az i. sort, melyre $[AI]_{i,j-1}$ pozitív és $\underline{b}_i$ / $[AI]_{i,j-1}$ minimális. Utóbbit hányadosszabálynak is nevezzük.

3. A kiválasztott sor segítségével nullázzuk ki a kiválasztott oszlop többi sorában lévő elemeket az i. sor megfelelő számszorosának hozzáadásával.

4. Ismételjük az eljárást az első lépéstől addig, amíg az alsó sor minden eleme nagyobb vagy egyenlő nem lesz, mint nulla. Ekkor a szimplex tábla bal alsó sarkában megjelenik az optimális célfüggvényérték, valamint leolvasható a megoldás az első oszlopból.

Megjegyzés:
- ha nem bázis oszlopban a (z-c) sorban 0 szerepel, akkor létezik alternatív optimum.
- ha létezik olyan oszlop, melyre a (z-c) sorban negatív, a többi sorban pedig nem pozitív elemek szerepelnek, akkor a feladat megoldása nem korlátos.
- a szimplex algoritmus ciklikussá válhat, ekkor különböző változatait kell használnuk a megoldáshoz (pl Bland szabály, lexikografikus szimplex módszer)