19. fejezet

Logika

Az ítéletlogika és a predikátumkalkulus szintaxisa és szemantikája. A szemantikus következményfogalom. Alapvető módszerek a szemantikus következmény bizonyítására az ítéletlogikában – igazságtábla, szemantikus fa, rezolúció.

19.1. Alapfogalmak

A logika tárgya (elvileg) az emberi gondolkodási folyamat vizsgálata és helyes gondolkodási formák keresése, illetve létrehozása.

19.1.1. Definíció (Állítás). *Olyan kijelentés, melynek logikai értéke (igaz volta) eldönthető.*

19.1.2. Definíció (Gondolkodási forma). *Gondolkodásforma altt egy olyan (F, A) párt értünk, ahol A állítás, $F = \{A_1, \ldots, A_n\}$ pedig állítások egy véges (?) halmaza.*

A gondolkodásforma helyes*, ha minden esetben, amikor F minden állítása igaz, akkor A is igaz.*

19.1.3. Definíció (Igazságértékek). *Legyen $\mathbb{L} = \{igaz, hamis\}$ az igazságértékek halmaza.*

A logikai műveletek igazságtáblája.

X	Y	$\neg X$	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \supset Y$
i	i	h	i	i	i
i	h	h	h	i	h
h	i	i	h	i	i
h	h	i	h	h	i

19.2. Ítéletlogika

19.2.1. Definíció (Az ítéletlogika szintaxisa). *Az ítéletlogika* ábécéje *(V_0):*

- *ítéletváltozók (V_v),*
- *zárójelek ($($, $)$),*
- *logikai műveleti jelek ($\neg, \wedge, \vee, \supset$).*

1. *Minden ítéletváltozó ítéletlogikai formula (ezek a* prímformulák*).*
2. *Ha A és B ítéletlogikai formulák, akkor $\neg A$, $\neg B$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ és $(A \supset B)$ is ítéletlogikai formulák.*
3. *Minden ítéletlogikai formula előáll a fenti szabályok véges sokszori alkalmazásával.*

Megjegyzés. Precedenciák bevezetése mellett a zárójelek egy része elhagyható, ami javíthatja a formulák olvashatóságát.

19.2.2. Definíció (Literál). *Ha X ítéletváltozó, akkor az X és $\neg X$ formulákat literáloknak nevezzük, melyeknek alapja X.*

19.2.3. Definíció (Részformula, közvetlen részformula).

1. *Prímformulának nincs közvetlen részformulája.*
2. *$\neg A$ közvetlen részformulája A.*
3. *$A \circ B$ közvetlen részformulája A (bal oldali) és B (jobb oldali).*

1. *Egy formulának részformulája a közvetlen részformulája.*
2. *Egy formulának részformulái minden részformulájának közvetlen részformulái is.*

19.2.4. Definíció (Művelet hatásköre). *A formula részformulái közül az a legkisebb logikai összetettségű, melyben a művelet előfordul.*

19.2.1. Az ítéletlogika szemantikája

19.2.5. Definíció (Interpretáció). *Interpretációnak nevezünk egy $I : V_v \to \mathbb{L}$ függvényt, mely tehát minden ítéletváltozóhoz egyértelműen hozzárendel egy igazságértéket.*

19.2.6. Definíció (Bázis). *Kiértékelés egy* bázis*ának nevezzük a kiértékelt formulában szereplő ítéletleváltozók egy sorrendjét.*

19.2.7. Definíció (Formula logikai jelentése). *A formula logikai jelentése egy $B_I : \mathcal{F} \to \mathbb{L}$ függvény, ahol I egy interpretáció, $\mathcal{F}$ pedig az összes formulák halmaza.*

1. *Ha X ítéletváltozó, akkor $B_I(X) = I(X)$.*
2. *Ha $X = \neg Y$ negációs formula, akkor $B_I(X) = \neg I(Y)$.*
3. *Ha $X = (Y \circ Z)$ alakú, akkor $B_I(X) = B_I(Y) \circ B_I(Z)$.*

19.2.8. Definíció (Igazhalmaz, hamishalmaz). *Egy formula* igazhalmaz*a azon interpretációk halmaza, melyen a formula igazságértékelése igaz. A formula* hamishalmaz*a az interpretációk „másik fele", tehát azon interpretációk halmaza, melyekre a formula igazságértékelése hamis.*

Igazságtáblázat

Az összes interpretáció és a hozzájuk kapcsolódó logikai jelentések megadásának egyik módja az igazságtáblázat (ld. például a fejezet elején).

Az igazságtáblázatban felsoroljuk az összes ítéletváltozó minden kiértékelési kombinációját. Ez alapján már tetszőleges formula igazságértékelése kiszámítható a logikai műveletek igazságtáblázatából.

Szemantikus fa

19.2.9. Definíció. *Egy n változós szemantikus fa egy n szintű bináris fa, ahol a szintek a bázisbeli változóknak felelnek meg. Minden csúcsból kivezető egyik él az X, a másik a $\neg X$ értékkel címkézett, ahol X a kiinduló csúcs szintjéhez rendelt változó.*

Egy szemantikus fa minden levele egy-egy interpretációt reprezentál. Ha egy levéltől felfelé haladunk a fában, akkor X jelentse azt, hogy $I(X) = igaz$, $\neg X$ pedig, hogy $I(X) = hamis$.

Szemantikai fogalmak

19.2.10. Definíció (Kielégíthető és kielégíthetetlen formula). *Egy formula* kielégíthető*, ha van olyan interpretáció, melyben igazságértéke igaz (Ezt $I \models_0 F$-fel jelöljük és úgy olvassuk, hogy I az F formula modellje).*

Kielégíthetetlen *egy formula, ha nem kielégíthető, azaz igazságértékelése minden interpretációban hamis.*

19.2.11. Definíció (Tautológia (logikai törvény)). *A tautológia olyan formula, mely minden interpretációban igaz értékű.*

19.2.12. Definíció (Tautologikus következmény). *G formula tautologikus következménye $\mathcal{F}$ formulahalmaznak, ha minden interpretációban*

$$I \models_0 \mathcal{F} \Rightarrow I \models_0 G.$$

19.2.2. Az eldöntésproblémák

Elöntésproblémának nevezzük a következő feladatokat:

1. döntsük el tetszőleges formuláról, hogy tautológia-e!
2. döntsük el tetszőleges formuláról, hogy kielégíthetetlen-e!

19.2.13. Tétel (A kielégíthetetlenségről). *Ha $\mathcal{F} \models_0 G$, akkor $\mathcal{F} \cup \{\neg G\}$ kielégíthetetlen.*

19.2.14. Tétel (Dedukció). $\mathcal{F} \models_0 G \Leftrightarrow \mathcal{F} \backslash \{F_n\} \models_0 (F_n \supset G)$.

19.2.15. Tétel (A tautológiáról). $\mathcal{F} \models_0 G \Leftrightarrow \models_0 F_1 \supset (F_2 \supset (\ldots \supset (F_n \supset G)\ldots))$.

Megjegyzés. A fenti tétel alapján tehát az egyik eldöntésprobléma visszavezethető a másikra, így elég egy kérdést vizsgálunk.

Megoldás igazságtáblázattal

Az ítéletlogikában a tautológiák megkeresésének legegyszerűbb módszere az igazságtáblázat.

Készítsük el a formula igazságtáblázatát: ha a formula minden interpretációban igaz, akkor tautológia, ha pedig mindenhol hamis, akkor kielégíthetetlen.

Megoldás szemantikus fával

19.2.16. Definíció (φ igazságértékelés).

1. *Ha A prímformula, akkor a* φA^i *feltételt pontosan azok az interpretációk elégítik ki, melyekben* $I(A) = igaz$*,* φA^h *feltételt pedig azok, ahol* $I(A) = hamis$*.*

2. *A* $\varphi(\neg A)^i$ *feltétel pontosan akkor teljesül, ha teljesül a* φA^h *fetétel.*

3. *A* $\varphi(A \wedge B)^i$ *feltétel pontosan akkor teljesül, ha egyszerre teljesülnek a* φA^i *és* φB^i *feltételek.*

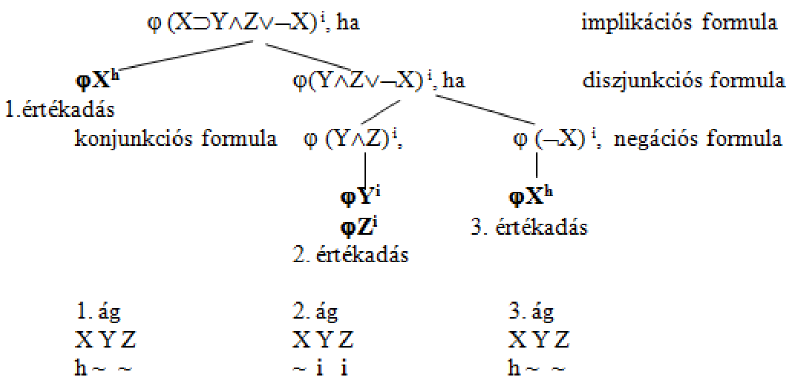
4. *A* $\varphi(A \vee B)^i$ *feltétel pontosan akkor teljesül, ha vagy a* φA^i*, vagy a* φB^i *feltétel teljesül.*

5. *A* $\varphi(A \supset B)^i$ *feltétel pontosan akkor teljesül, ha teljesül a* φA^h *vagy* φB^i *feltétel.*

(A hamis esetek is könnyen adódnak.)

A fenti definíció alapján felépíthetjük egy formula igazságértékelés-fáját, melyből megkapjuk a formula igaz-, vagy hamishalmazát.

Tegyük fel, hogy az igazhalmazt keressük F formulára. Az igazságértékelés-fa gyökerében φF^i áll, az alatta lévő szinteken pedig mindig a fenti feltételek szerint bonjuk fel a feltételt, amíg csak prímformulák igazságértékeléséhez nem jutunk.



19.1. ábra. Igazságértékelés szemantikus fával

Szemantikus fára illesztés

19.2.17. Definíció (Klóz). *Klóznak nevezzük különböző literálok diszjunkcióját.*

19.2.18. Tétel. *Az eldöntésprobléma visszavezethető klózhalmaz kielégíthetetlenségére.*

A tétel szernt tehát elegendő klózhalmazokat vizsgálnunk, a továbbiakban ezt tesszük.

Egy k klóz akkor hamis egy interpretációban, ha minden literálja hamis. Egy L literál hamis abban az interpretációban, ahol a szemantikus fában a literálnak megfelelő címke $\neg L$. Egy klóz illesztése a szemantikus fára az olyan ágak kiválasztása amelyeken a klóz minden literálja negálva szerepel. Ezekben az interpretációkban ez a klóz hamis. *Cáfoló csúcs*nak nevezzük a szemantikus fa azon csúcsát, amelyiket elérve egy klóz (amely azt megelőzően még nem volt hamis) hamissá válik. *Levezető csúcs*az a csúcs, amelyiket két cáfoló csúcs követ. A szemantikus fa egy ága zárt, ha cáfoló csúcsban végződik. A szemantikus fa zárt, ha minden ága zárt.

Hatékonyság növelése. A módszer hatékonysága növelhető, ha nem akarunk minden levelet illeszteni, hanem a biztosan illeszthető ágakat azonnal illesztettnek vesszük. Ezt ügyes bázisválasztással kombinálva jelentősen csökkenthetjük az illesztési időt.

Rezolúció

A rezolúció módszere is klózhalmaz kielégíthetetlenségét vizsgálja.

19.2.19. Definíció (Rezolvens). *Két klóz (C_1 és C_2)* rezolválhatók*, ha pontosan egy komplemens literálpárt tartalmaznak.*

Ha $C_1 = X \vee C_1'$ és $C_2 = \neg X \vee C_2'$, akkor rezolvensük $\rho(C_1, C_2) = C_1' \vee C_2'$.

Ha C_1' és C_2' üresek, akkor a fenti rezolvenst üres klóz*nak nevezzük és $\square$ jellel jelöljük.*

19.2.20. Definíció (Rezolúciós levezetés). *S klózhalmaz rezolúciós levezetése olyan véges $C_1, C_2, \dots C_n$ klózsorozat, ahol $\forall i = 1, \dots, n$:*

- *$C_i \in S$, vagy*
- *$\exists 1 \leq s, t \leq i$, hogy $\rho(C_s, C_t) = C_i$.*

19.2.21. Tétel (A rezolúció helyessége és teljessége). *Egy klózhalmazból rezolúciós levezetéssel akkor és csak akkor állítható elő az üres klóz, ha a klózhalmaz kielégíthetetlen.*

A rezolúciós levezetések előállítására különböző stratégiák léteznek, melyeknek egy része megőrzi a teljességet, míg mások nem.

Lineáris rezolúció. Olyan $q_1, p_1, q_2, p_2, \ldots, q_n, p_n$, klózsorozat, ahol $q_1, p_1 \in S$, és $i = 2, 3, \ldots, n$ esetben a p_i a p_{i-1}, q_{i-1} rezolvense, ahol $q_{i-1} \in S$, vagy egy korábban megkapott centrális klóz (rezolvense valamely $p_s, q_s (s < i)$-nek).

19.2.22. Tétel. *A lineáris rezolúció teljes rezolúciós stratégia.*

Lineárisinput-rezolóció. Olyan $q_1, p_1, q_2, p_2, \ldots, q_n, p_n$, klózsorozat, ahol $q_1, p_1 \in S$, és $i = 2, 3, \ldots, n$ esetben a p_i a p_{i-1}, q_{i-1} rezolvense, illetve $q_i \in S$.

19.2.23. Definíció (Horn-klóz). *Horn-klóznak nevezzük az olyan klózt, melyben legfeljebb egy nem negált literál van.*

19.2.24. Tétel. *A lineárisinput-rezolúció Horn-klózokon teljes.*

19.3. Elsőrendű logika

19.3.1. Definíció (Elsőrendű állítás). *Elemek egy halmazára megfogalmazott kijelentő mondat.*

19.3.1. Az elsőrendű logika leíró nyelve

Nem logikai rész. Egy

$$< S, P, F, C >$$

négyes, ahol S a fajtaszimbólumok nem üres halmaza, P a predikátumszimbólumok, F a függvényszimbólumok, C pedig a konstansszimbólumok halmaza.

Logikai rész.

- Individuumváltozók (minden fajtában legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok).
- Logikai műveletek (mint a nulladrendű logikánál).
- elválasztójelek ((,)),
- kvantorok ($\exists$, $\forall$).

19.3.2. Az elsőrendű logika szintaxisa

19.3.2. Definíció (Term).

1. *Minden π fajtájú individuumváltozó és konstansszimbólum π fajtájú term.*
2. *Ha $f(\pi_1, \dots, \pi_k; \pi_f) \in F$ és $t_1, \dots, t_k$ rendre $\pi_1, \dots, \pi_k$ fajtájú termek, akkor $f(t_1, \dots, t_k)$ egy π_f fajtájú term.*
3. *Minden term előáll a fenti szabályok véges sokszori alkalmazásával.*

19.3.3. Definíció (Formula).

1. *Ha $p(\pi_1, \dots, \pi_k) \in P$ predikátumszimbólum és $t_1, \dots, t_k$ rendre $\pi_1, \dots, \pi_k$ fajtájú termek, akkor $p(t_1, \dots, t_k)$ formula (*atomi formula*).*
2. *Ha A és B formulák, akkor $\neg A$, $\forall x A$, $\exists x A$, valamint $(A \circ B)$ is formulák.*
3. *Minden elsőrendű formula előáll a fenti lépések véges sokszori alkalmazásával.*

Formulák részei. A *részterm* és *részformula* fogalmak könnyen definiálhatók.

19.3.4. Definíció (Prímformula). *Az atomi formulákat és a kvantált formulákat prímformuláknak is nevezzük.*

19.3.5. Definíció. *Egy formula x változójának egy előfordulása:*

- *szabad, ha nem esik x-re vonatkozó kvantor hatáskörébe,*

- *kötött, ha x-re vonatkozó kvantor hatáskörébe esik.*

19.3.6. Definíció. *Egy formula x változója*

- *kötött, ha minden előfordulása kötött,*
- *szabad, ha minden előfordulása szabad,*
- *egyébként vegyes.*

19.3.7. Definíció. *Egy formula*

- *zárt, ha minden változója kötött,*
- *nyitott, ha legalább egy változójának van legalább egy szabad előfordulása,*
- *kvantormentes, ha nincs benne kvantor.*

Megjegyzés. A zárt formulák elsőrendű állításokat szimbolizálnak.

19.3.3. Az elsőrendű logika szemantikája

19.3.8. Definíció (Matematikai struktúra). *Matematikai struktúra egy $< U, R, M, K >$ négyes, ahol*

- $U = \bigcup_\pi U_\pi$ *nem üres alaphalmaz (univerzum),*
- R *az U-n értelmezett logikai függvények (relációk) halmaza,*
- M *az U-n értelmezett matematikai függvények (alapműveletek) halmaza,*
- K *az U kijelölt elemeinek (konstansainak) esetleg üres halmaza.*

19.3.9. Definíció (Interpretáció). *Az interpretáció egy $< u, R, M, K >$ matematikai struktúra és $I =< I_S, I_P, I_F, I_C >$ függvénynégyes, ahol*

- $I_S : \pi \to U_\pi$,
- $I_P : P \to P^I$,
- $I_F : F \to F^I$,
- $I_C : C \to C^I$ $(C^I \subset U)$.

19.3.10. Definíció (Változókiértékelés). *Egy $\kappa : V \to U$ leképezés.*

19.3.11. Definíció (Elsőrendű formula logikai értéke). *Egy elsőrendű formula logikai értéke I interpretációban, κ változókiértékelés mellett a következőképpen alakul:*

1. *ha x individuumváltozó, akkor* $|x|^I_\kappa = \kappa(x)$,
2. *ha c konstansszimbólum, akkor* $|c|^I_\kappa = I_C(c)$,
3. $|f(t_1, \dots, t_n)|^I_\kappa = I_F(f)(|t_1|^I_\kappa, \dots, |t_n|^I_\kappa)$,
4. $|p(t_1, \dots, t_n)|^I_\kappa = I_P(p)(|t_1|^I_\kappa, \dots, |t_n|^I_\kappa)$,
5. $|\neg A|^I_\kappa = \neg |A|^I_\kappa$,
6. $|A \wedge B|^I_\kappa = |A|^I_\kappa \wedge |B|^I_\kappa$,
7. $|A \vee B|^I_\kappa = |A|^I_\kappa \vee |B|^I_\kappa$,
8. $|A \supset B|^I_\kappa = |A|^I_\kappa \supset |B|^I_\kappa$,
9. $|\forall x A|^I_\kappa =$ *igaz, ha* $|A|^I_{\kappa^*} =$ *igaz a κ minden κ^* x-variánsára,*
10. $|\exists x A|^I_\kappa =$ *igaz, ha κ-nak van olyan κ^* x-variánsa, melyre* $|A|^I_{\kappa^*} =$ *igaz.*

19.3.4. A szemantikus következményfogalom

19.3.12. Definíció. *Azt mondjuk, hogy G formula szemantikus következménye az $\mathcal{F}$ formulahalmaznak, ha minden olyan I interpretációra, amelyre $I \models \mathcal{F}$, fennáll $I \models G$ is. (Jelölése $F \models G$.)*

A következményfogalomhoz kapcsolódó definíciók és egyes tételek (eldöntésprobléma, dedukció) a nulladrendű logikához hasonló módon kimondhatók.

19.3.13. Tétel. *Ha G tautológia, akkor G logikailag igaz.*

19.3.14. Tétel (Gödel). *Az elsőrendű eldöntésprobléma nem oldható meg algoritmikusan.*

Megjegyzés. Véges univerzum esetén létrehozható elsőrendű formula igazságtáblája, illetve szemantikus fája a kiértékelési szabályok alapján, de ezek még egyszerű formulák esetén is nehezen kezelhetők.

Rezolúció

Elsőrendű predikátumkalkulusban is végezhető rezolúció, ráadásul a módszer helyes és teljes is. Nehézséget a klózok kialakítása okozhat, amelyek *zárt, univerzálisan kvantált literálok konjunkciójából állnak*. Ehhez eszközeink a *prenex*-, illetve *skolem-formák*.